- *#1: 06/10/6*

  - **Přednášející**
    - Doc. Pavel Valtr
    - http://kam.mff.cuni.cz/~valtr/dm.html
      - stručné obsahy přednášek
      - později info o zkoušce
  - **Literatura**
    - Kapitoly z diskrétní matematiky
      - podle toho postupuje
      - 240 Kč
  - **Co je diskrétní matematika**
    - vlastnosti struktur na konečných množinách
    - různá jiná vymezení
  - **Příklady úloh**
    - 1. problém šatnářky
    - 2. domeček jednou čarou
    - 3. plyn, elektřina a voda pro tři domy
  - **Pojmy**
    - zavedení uspořádaných dvojic pomocí množin
      - (x, y) = { {x}, {x, y} }
    - binární relace
      - mezi: libovolná X, Y
      - na X: X, X

- *#2: 06/10/13*

  - **Binární relace**
    - Vlastnosti relací
      - def. Relace R na X je
        - *reflexivní,* pokud $\forall x \in X$: x R x
        - *symetrická*, pokud $\forall x,y \in X$: x R y –> y R x
        - *transitivní*, pokud $\forall x,y,z \in X$: $z \in X$: (x R y & y R z) –> x R z
        - *ekvivalence*, pokud R je reflexivní, symetrická a transitivní
    - Třída ekvivalence
      - Značení
        - R ekvivalence na X, $x \in X$ *třída ekvivalence* určená prvkem x:
          - R[x] = {y ∈ X: x R y} (= {y ∈ X: y R x} vyplývá ze symetrie)
      - Příklad
        - X = {1,2,3,4}
        - R = {(2,2), (3,3), (1,1), (4,4), (2,4), (4,2) }
          - je relace
          - je ekvivalence (reflexivní, symetrická i transitivní)
          - R[1] = {1}, R[2] = R[4] = {2,4}, R[3] = {3}
      - Tvrzení a důkaz (třída ekvivalence)
        - R ekvivalence na X, potom
          - i. $\forall x \in X$: R[x] ≠ ∅
          - ii. ∀x,y∈X: R[x]=R[y] ∨ R[x] ∩R[y] = ∅
        - důkaz
          - i. x ∈ R[x]
          - ii. nechť x,y ∈ X:
            - a) pokud x R y:
              - ukážeme R[x] ⊆ R[y]
                - nechť z ∈ R[x], tedy z R x –> z transitivity: z R y –> z ∈ R[y],
              - obdobně (díky symetrii) R[y] ⊆ R[x]
            - b) neplatí x R y
              - ukážeme R[x] ∩ R[y] = ∅, dokážeme sporem

            - tedy předpoklad R[*x*] ∩ R[*y*] ≠ ∅
            - ∃ *z* ∈ R[*x*] ∩ R[*y*] libovolný, potom *x* R *z* a *z* R *y*, tedy *x* R *y*: *spor*
    - důsledek
        - Množina (systém množin) {R[*x*]: *x* ∈ X} tvoří *rozklad množiny* X
            - tj. každý prvek z X patří do právě jedné z množin ležících v {R[*x*]: *x* ∈ X}

- **Uspořádání**
    - Def. *(částečné= ne nutně lineární) uspořádání*
        - je relace na *X*, která je reflexivní, transitivní, „antisymetrická“
        - Def. *antisymetrická relace:* ∀*x,y* ∈ X: (*x* R *y* & *y* R *x*) –> x=y
        - př.
            - (**N**, ≤) ref., trans., antisym. 3≤3 & 3≤3 –> 3=3
            - (**N**, | *(dělí)*)
            - (P(X) *(potenční množina)*, ⊆)
        - obvyklé značení uspořádání: ≤ (takže to *nemusí znamenat menší nebo rovno*, někdy se to kreslí zakulaceně ⩽, aby bylo jasno)
        - Def. *lineární uspořádání*
            - uspoř. splňující ∀x,y∈X: x≤y ∨ y≤x
            - např. (**N**, | *(dělí)*) není
            - u potenční množiny záleží na velikosti X
                Do 2 prvků.

- **Zobrazení, permutace a faktoriál**
    - Def. *zobrazení* (funkce)
        - narozdíl od skript Valtr preferuje termín *zobrazení* a ne funkce
        - X, T množiny: *Zobrazení* z X do Y je lib. relace f ⊆ X×Y splňující ∀x: ∃! *y* ∈ Y: *x* f *y*
            - moje pozn.: tedy *X* = *D*(f), *Y* = *H*(f)
        - značení
            - f: *X* –> *Y* f je zobrazení z *X* do *Y*
            - x f y, resp. (x,y) ∈ f se značí
                - f: x |–> y
                - f(x) = y
    - Def. f: X –> Y, g: Y–>Z, potom g ∘ f značí zobrazení z X do Z s předpisem g∘f(x) = f(g(x)) – *složené zobrazení*
        - někdy „g ∘ f“° = f ○ g (tedy v opačném pořadí)
        - pozn. g∘f je opravdu zobrazení z X do Z
        - TODO: Důkaz: g∘f(x) je jediné?
            - g∘f(x) = g(f(x)=g(y) = z)
                - f(x) = y pro jediné y ∈ Y
                - g(y) = z pro jediné z ∈ Z
    - Def. *zobrazení* f: X–>Y je
        - *prosté* (*injekce*), pokud ∀x,y∈X: x≠y –> f(x)≠f(y)
            - (vlevo nahoře zakroucená šipka)
        - *na* (*surjekce*, nebo: *z X na Y*), pokud pro ∀y∈Y ∃x∈X: x f y
            - (šipka se zdvojeným koncem na pravé straně (–>>))
        - *vzájemně jednoznačné* (*bijekce*): prosté & na
            - (vlevo nahoře zakroucená šipka se zdvojeným koncem na pravé straně, nebo <–> s „1-1“ nad šipkou
    - Pozorování
        - nechť X, Y jsou konečné množiny
            - X–>Y prosté: |X| ≤ |Y|
            - X–>Y na: |X|≥|Y|
            - –> bijekce: |X|=|Y|
    - Pozn. funkce buď = zobrazení, nebo = zobrazení do množiny reálných čísel
    - Def. *permutace* a *faktoriál*
        - Def. Permutace konečné množiny X je libovolná bijekce π: X –> X
            - obecnější definice než na SŠ –> X nemusí být uspořádaná
            - př. X={a,b,c,d}
                - π = {(a,b),(b,d),(c,c),(a,a)} (zápis do dvou řádků matice: dvojice se píší jako sloupce, případně jen vektor přiřazených prvků, je-li X lineárně uspořádaná (definováno lineární uspořádání)
        - Def. Faktoriál n! (n faktoriál) n! = součin n prvních přirozených čísel, 0! = 1
            - Tvrzení: Počet permutací *n*-prvkové množiny X = P(n) = n!
    - Věta: |X| = n, |Y| = k, potom existuje k^n zobrazení z X do (nikoli na) Y

- *#3: 06/10/20*

- **Zobrazení (pokračování)**
  - Věta: lXl = n, lYl = k, potom existuje k^n zobrazení z X do (nikoli na) Y
    - z toho prostých z X do Y:
      - *k* (*k*-1) (*k*-2) … (*k*-*n*+1)
        - první prvek k možností, další k-1, atd. a takhle jdeme n-krát, tzn. dokud se nám nevyčerpá X
        - k<n –> prosté zobrazení není
    - z toho bijekcí:
      - k! = n! bijekcí pro k=n
      - 0 bijekcí pro k≠n
    - z toho X na Y:
      - *později (za 14 dní asi)*

- **Kombinační číslo**
  - Def. *Kombinační čísla* (příp. *binomické koeficienty* – ve skriptech)
    - (*n* nad *k*) = *n*! / *k*! (*n*-*k*)! = *n*(*n*-1) … (*n*-*k*+1) / (*k*(*k*-1)…1), kde *n*, *k* ∈ $\mathbf{N}_0$ *n* ≥ *k*
    - (*n* nad *k*) = počet *k*-prvkové podmnožin *n*-prvkové množiny
  - Ukážeme, že dvě definice (viz výše) kombinačních čísel jsou ekvivalentní
    - množina X, lXl = *n*
    - počet uspořádaných *k*-tic různých prvků z X
      - přirozeně
        - = *n* (*n*-1) … (*n*-*k*+1) (celkem *k* činitelů)
      - vybereme neuspořádanou množinu a pak vybereme jedno uspořádání:
        - = počet *k*-prvkových podmnožin z X × k! (vybírání prvků na první, druhé, … místo)
      - z porovnání těchto dvou vyjádření vychází, že definice kombinačních čísel se rovnají
  - Značení: (X nad k) [nečte se X nad k!] = množina k-prvkových podmnožin X
    - $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$
    - $\binom{\{1,2,3,*\}}{2} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,*\},\{2,3\},\{2,*\},\{3,*\}\}$
    - cx
  - Platí rovnosti
    - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (lze odvodit z obou definic, i z druhé)
      - Odvození z druhé definice: ke každé *k*-prvkové lze vzdájemně jednoznačně přiřadit (*n*-*k*)-prvkovou, počty se tedy rovnají
    - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (opět z obou definic, samozřejmě)
      - Odvození z první definice
      - Odvození z druhé (kombinatorické definice:
        - $\left|\binom{X}{k}\right| = \left|\binom{X-\{x_n\}}{k-1}\right| + \left|\binom{X-\{x_n\}}{k}\right|$
        - … **=** počet *k*-prvkových podmožin mn. *X* obsahujících prvek *xn* **+** počet *k*-prvkových podmožin mn. *X* neobsahujících prvek *xn*
        - ☒

          to znamená „konec důkazu“, nebo EPA (est post aves – je po ptákách)
  - Pascalův trojúhelník
    - (00)
    - (10) (11)
    - (20) (21) (22)
    - (30) (31) (32) (33)
    - …
    - lze vyplnit bez počítání kombinačních čísel
      - po obvodu jedničky, symetrie
      - součty vyplývají z druhé rovnosti (vyz výše)

- **Binomická věta**

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}$
- Důkaz indukcí
  - n –> n+1
    - (x+y)^n = (x+y)(x+y)^n = (ind. předpoklad) (x+y) ((n nad 0) x^0 y^n + … (n nad n)x^n y^0) =
    - = (n nad 0) x^1y^n + …) (n nad n-1)x^n y^1+(n nad n)x^(n+1) y^0 +
    - + (n nad 0) x^0 y^(n+1) + (aby to bylo hezky pod předchozím řádkem) … + (n nad n) x^n y^1 =
    - = součet předchozích dvou = suma z binomické věty
    - vyjde to

- **Multinomická věta**
  - zobecnění binomické věty
    - platí (n nad k) = (n nad k, n-k)

    $\forall n \in \mathbf{N}_0 \;\; \forall m \in \mathbf{N} \; \forall x_1, \cdots, x_m \in \mathbf{R}$:
  - $(x_1 + \cdots + x_m) = \sum_{k_1, k_2 \ldots k_m \in \mathbf{N}_0; k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots k_m} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}$
  - multinomický koeficient
    - $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$
    - Počet způsobů zařazení čísel 1, 2, …, *n* do *m* množin („šuplíků“), X1 až Xm, tak aby lXil = ki

- *#4: 06/10/27*

- **Multinomická věta (z minula)**
  - př. rozmístění 200 lidí do autobusů po 80, 70, 50 místech
    - řešení: (200 nad 80, 70, 50) = velké číslo

- **Odhady faktoriálů a kombinačních čísel**
  - Věta:
    - $n^{\frac{n}{2}} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
    - Důkaz
      - $(1+i)(n-i) = n + i(n-1-i) \ge n; i = 0,1,\ldots,n-1$
      - $(1+i)(n-i) \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;A - G nerovnost

        $n^n \le (n!)^2 \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$
  - Faktoriál přesněji (bez důkazu)
    - $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$
  - Víme
    - $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
  - Zřejmě (např. z 1. definice kombinačního čísla)
    - $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$
  - Z toho pro nemrňavá n>1
    - $\frac{2^n}{n+1} < \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} < 2^n$
  - Kombinační číslo přesněji
    - $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$
    - $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} \le \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$

- **Princip inkluze a exkluze**
  - Př.: Z diagramu lze snadno odvodit:
    - $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|$
    - $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|$
    - I obecně I = jednotlivé - průniky dvou + průniky tří - … atd. (poslední znamínko vyjde podle parity)
  - Věta: Jsou li A_1, A_2, … A_n konečné množiny, pak pro velikost sjednocení množin platí:
    - $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$
    - Důkaz
      - pro každý prvek budeme porovnávat kolikrát je započten vlevo a vpravo
      - Nechť $x \in \boldsymbol{A}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_n$
        - vlevo: 1× (to je jasné
        - vpravo:
          - označme d = počet množin $\boldsymbol{A}_i$, v nichž leží x
          - (jednotlivé množiny:) (d nad 1) - (kolik dvojic vybereme z d množin?) (d nad 2) + (d nad 3) + … ± (d nad d) =
          - = 1 - ((d nad 0) - (d nad 1) + (d nad 2) - … ±(d nad d)) = 1 - $(-1+1)^d$ (z binomické věty) = 1-0
          - = 1
  - Příklad: Vánoční besídka *aneb* Šatnářka
    - n dárců, každý dá jeden dárek náhodnému dárci (jinému nebo sobě)
    - Možností, kterými mohou dostat dárky: $n!$ (každá možnost stejně pravděpodobná ($1/n!$)
    - Pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj vlastní dárek?
      - Matematicky: hledáme $š(n)/n!$, kde $š(n)$ je počet permutací π množiny {1, 2, …, n} bez pevného bodu (i je pevný bod, pokud $\pi(i) = i$)
      - Věta: $š(n) = n!\,(1-1/1! + 1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n * 1/n!)$
        - zajímavost: osciluje konverguje k irac. č. mezi 0 a 1
      - Pro malé hodnoty
        - $š(1) = 1!(1-1/1!)$
        - $š(2) = 1$
        - $š(3) = 2$
      - Důkaz pro větší hodnoty
        - $\boldsymbol{S}_n$ = množina všech permutací {1, 2, …, n}
        - $\boldsymbol{A}_i = \{\pi \in \boldsymbol{S}_n : \pi(i) = i\}$, pro $i = 1, \ldots, n$
          permutace, kdy i-tý člověk dostane svůj dárek
        - $|\boldsymbol{A}_i| = (n-1)!$
          protože i-tý prvek je fixovaný
        - $|\boldsymbol{A}_i \cap \boldsymbol{A}_j| = (n-2)!$ pro $i \neq j$
          protože i-tý i j-tý prvek jsou fixované (zobrazí se samy na sebe)
    - *(pokračování příště)*

- *#5: 06/11/03*

- **Princip inkluze a exkluze (pokračování)**
  - Příklad: Vánoční besídka *aneb* Šatnářka (pokračování)
    - $\{i1, i2, \ldots, ik\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$
    - $|\boldsymbol{A}_{i1} \cap \boldsymbol{A}_{i2} \cap \ldots \cap \boldsymbol{A}_{ik}|$
    - Podle principu inkluze a exkluze
    - $š(n) = |\boldsymbol{S}_n| - |\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_n| =$
    - = $n!$ - ($n(n-1)!$ (součet velikostí všech) - (n nad 2)(n-2)! (součet velikostí průniků dvojic) + (n nad 3)(n-3)! - … (n nad n)(n-n)!) =
    - $$š(n) = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$$
    - Tedy pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj dárek je tedy:
      - $š(n)/n! = 1 - 1/1! + 1/2! - \ldots +- 1/n! \to 1/e$ pro $n \to \infty$; $1/e = 0{,}36787\ldots$
  - Příklad: Nechť X = {1, …, n}, Y = {1, …, l}, $n \geq l$. Kolik zobrazení z X *na* Y?
    - všech zobrazení: l^n
    - nechceme počítat ta, pro která $\exists y \in \boldsymbol{Y}\ \forall x \in \boldsymbol{X}\ f(x) \neq y$
    - pro i = 1, …, l, nechť A_i je zobrazení, kde se na prvek i nic nezobrazilo: $A_i = \{f{:}X \to Y{:}\ \forall x \in X{:}\ f(x) \neq i\} = \{f{:}X \to (Y - \{i\})\}$
      - tedy: $|A_i| = (l-1)^n$
    - $A_i \cap A_j = \{f{:}X \to (Y - \{i, j\})\}$

- tedy: $|A_i \cap A_j| = (l-2)^n$
- pro $\{i1, \dots ik\} \subseteq \{1, \dots, l\}$: $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik} = \{f:X \to (Y - \{i1, \dots ik\})\}$
  - tedy $|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}| = (l-k)^n$
- z PIE (princip inkluze a exkluze) počet zobrazení z X na Y
  - $l^n - \left|\bigcup_{i=1}^{l} A_i\right| = l^n - \left(l \cdot (l-1)^n - \binom{l}{2} \cdot (l-2)^n + \dots (-1)^{l-2} \binom{l}{l-1} \cdot (l-(l-1))^n + (-1)^{l-1} \binom{l}{l} \cdot (l-l)^n\right)$
  - Už nejde moc vylepšit:(.