Příklady A

Jiří Kunčar
MFF-UK,
Praha,
Česká republika,
`jiri.kuncar@gmail.com`

7. prosince 2006

1.příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+(-1)^n n}{\sqrt{n^2-n}+2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2-n}+2n} + \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2-n}+2n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}}} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+2\sqrt{\frac{n}{n+1}}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3} \right) = (*)$$

Pro n sudá:

$$(*) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Pro n lichá:

$$(*) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Dvě vybrané posloupnosti mají různé limity $\Rightarrow$ limita neexistuje

2.příklad

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

Odhadnu součet shora i zdola:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} < \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}} = \frac{n}{n}$$

Pak podle věty o dvou policajtech platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1$$

3.příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{2n} n!}$$

Podílové kritérium nám dává

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{2n+2}(n+1)!}}{\frac{n^n}{e^{2n} n!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{(n+1)e^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

Řada konverguje. (nepovažuji za nutné, aby se u řady s nezápornými členy hovořilo o absolutní konvergenci)

4.příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n}{n^2+1} (x+1)^n$$

Absolutní konvergence.

$$a_n = \left| \frac{3n}{n^2+1} (x+1)^n \right|$$

Pokud řada konverguje absolutně podle D'Alambertova podílového limitního kritéria, pak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3n+3}{(n+1)^2+1} (x+1)^{n+1}}{\frac{3n}{n^2+1} (x+1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)(3n+3)(n^2+1)}{3n(n^2+2n+2)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)(n^3+n^2+n+1)}{n^3+2n^2+2n} \right| = |x+1| < 1$$

Vyřešením absolutní hodnoty dostáváme:

$$-2 < x < 0$$

Musíme ještě vyšetřit krajní body $\{-2, 0\}$
Nechť $x = -2$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (-1)^n \frac{3n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{3n}{n^2+1}$$

Dostáváme, že tato suma diverguje, protože je $(-1)\sum a_n$ je ve tvaru $(-1)\sum \frac{1}{n}$ což je divergentní řada. Nechť $x = 0$, pak použitím Leibnitzova kritéria pro alternující řady dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n}{n^2+1}$$

$a_n > 0$, pro $\forall n$, dále $\{a_n\}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Důkaz. a_n je nerostoucí:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+3}{3n} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} &\leq 1 \\ 3n^3+3n^2+3n+3 &\leq 3n^3+6n^2+6 \\ 0 &\leq 3n^2-3n+3, \forall n \end{aligned}$$

Limita $\{a_n\}$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$ □

5.příklad Nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = b = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} (-1)^n b_n = 0$, protože $\{(-1)^n\}$ je omezená $\{b_n\}$ konverguje k nule

Důkaz. $\forall n \in R, |(-1)^n| < 1$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pak podle věty o dvou policajtech platí:

$$0 \leq |(-1)^n| \, |b_n| \leq 1 \, |b_n| = 0$$

□

Nebo búno $\lim_{n\to\infty} b_n = b \geq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n : n > n_0 : b_n \geq 0$, ale pak $\exists$ takové k, l, pro které platí, že $\lim (-1)^{n_k} b_{n_k} = b$ a $\lim (-1)^{n_l} b_{n_l} = -b \Rightarrow \lim (-1)^n b_n$ neexistuje.