Příklady B

Jiří Kunčar
MFF-UK,
Praha,
Česká republika,
jiri.kuncar@gmail.com

7. prosince 2006

1.příklad

Zadání:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|\sin n|} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{4n+1} - \cos n\pi}$$

Postup:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{|\sin n|}{n}} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{4n-1}{n}} - \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{|\sin n|}{n}} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{\frac{4n-1}{n}} - \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}} = \frac{0+1}{2 - \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$$

Pozn. Limita $\sqrt{\frac{|\sin n|}{n}}$ je rovna 0, protože $|\sin n|$ je omezená a $1/n \to 0$ pro $n \to \infty$

2.příklad

Zadání: $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$

Postup: Dokážeme monotónost a omezenost.

Důkaz.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{{a_n}^2 + 1 - 2{a_n}^2}{2a_n} = \frac{(1-a_n)(1+a_n)}{2a_n}$$

Klesající pro $a_n \in (1, \infty)$ a rostoucí pro $a_n \in (0, 1)$
Nechť je a_n klesající, pak , $\exists n_0 : n > n_0 : a_n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq 1$
Podle AG nerovnosti:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} = 1$$

$\Rightarrow$ omezená 1 zdola, klesající (rovnost nastává pokud $a_n = 1 \Rightarrow \{a_n\}$ je konstantní)
Nechť je a_n rostoucí, pak , $\exists n_0 : n > n_0 : a_n < 1 \Rightarrow a_{n+1} < 1$
SPOR. Protože $a_{n+1} \geq 1 \Rightarrow \exists n_1 > n_0 : a_n \geq 1 \Rightarrow$ je rovněž omezená 1 a klesající od n_1 $\square$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Protože $a_n > 0$, pro $\forall n$, tak $L \geq 0$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \\ 2L^2 &= L^2 + 1 \\ L^2 &= 1 \\ L &= 1 \end{aligned}$$

3.příklad

Zadání:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

Postup: Podle Cauchyho odmocninového kritéria platí:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1$$

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ konverguje.

4.příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-2)^n}{(2n^2-1)2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2(n+1)^2-1}\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2n^2-1}\frac{(x-2)^n}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)(n+1)(2n^2-1)}{2n(2(n^2+2n+1)-1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-2}{2}\frac{2n^3-1}{2n^3+4n^2+\dots}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right|$$

Pokud $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow 0 < \ x < 4$ pak řada konverguje absolutně.
Vyšetřím krajní hodnoty
$x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2)^n n}{2^n(2n^2-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{2n-\frac{1}{n}} \Rightarrow$ diverguje
jako harmonická řada $x = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2)^n n}{2^n(2n^2-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-\frac{1}{n}} \Rightarrow$ konverguje
podle Leibnitzova kritéria ($\{a_n\}$ nerostoucí, nezáporná)

5.příklad Nechť $\lim_{n\to\infty}|a_n| = a, a > 0$, pak

$\exists n_0 : \forall n > n_0$: $a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\exists n_0 : \forall n > n_0$: $a_n < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} -a_n = -a$

jinak $\forall n, \exists k_n, l_n : (a_{n_k} > 0)\&(a_{l_n} < 0) \Rightarrow \{a_n\}$ nená limitu.