Příklady

Jiří Kunčar
MFF-UK,
Praha,
Česká republika,
`jiri.kuncar@gmail.com`

7. prosince 2006

1.příklad Vytáhneme-li aritmetickou posloupnost k čísel, mezi kterýma je právě $i(i \geq 0)$ čísel, tak máme skupinku o $k + (k-1)i$ členech. Tu můžeme z n čísel vybrat $n - k - (k-1)i + 1$ způsoby. Dále by mělo platit, že

$$n \geq k + (k-1)i \Rightarrow \lfloor \frac{n-k}{k-1} \rfloor \geq i \geq 0$$

Pokud tedy sečtu všechny možnosti, jak uspořádat tyto skupinky pro všechny možné i tak dostávám:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-k}{k-1} \rfloor} (n - k - (k-1)i + 1)$$

2.příklad Nejmenší n-úhelník, ve kterém se protínají úhlopříčky je 4-úhelník. Přidám-li další bod stane se jedna strana novou úhlopříčkou (neprotíná žádné existující úhlopříčky) a začnu vytvářet nové úhlopříčky spojováním přidaného bodu a ostatních bodů $(n-3)$ kromě jeho sousedů.
Pokud označím přidaný bod číslem 1 a spojovaný k $(n-1 \geq k \geq 3)$, tak nová úhlopříčka protne všechny úhlopříčky spojující body 3 až $k-1$ s body $k+1$ až $n-1 \Rightarrow$ vznikne $(k-2)(n-k)$ nových průsečíků pro k-tý bod $\Rightarrow$ přidáním bodu k $n-1$ bodům vznike

$$\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(n-k)$$

nových průsečíků ke stávajícím $\Rightarrow$ celkem, i s předcházejícími průsečíky, se v tomto n-úhelníku nachází

$$\sum_{m=4}^{n} \sum_{k=3}^{m-1} (k-2)(m-k)$$

PŘÍLIŽ SLOŽITĚ, ZKUSTE JEDNODUŠEJI

5.příklad Počet všech permutací je $n!$. Počet permutací, kdy se k sudých čísel zobrazí na sebe je

$$(n-k)! \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ k \end{array} \right)$$

z toho snadno dostávám pomocí principu inkluze a exluze, že počet špatných permutací je

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{k+1} (n-k)! \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ k \end{array} \right)$$

a to odečteme od všech možných permutací $n!$. Výsledek je tedy:

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (n-k)! \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ k \end{array} \right)$$

6.příklad Budu vybírat k čísel $(1 < k < n)$ z n prvkové množiny $\Rightarrow$ vzniknou mi dvě skupinky čísel o velikosti k a $n-k$ $\Rightarrow$ obě zpermutuji, ale s jedním pevným bodem, abych neměl stejné cykly $\Rightarrow$ $\binom{n}{k}(k-1)!\,(n-k-1)!$ $\Rightarrow$ ted stačí pouze sečít pro $\forall k$, ale musíme si uvědomit, že všechny možnosti se zde budou vyskytovat 2 krát $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(k-1)!\,(n-k-1)!$$

12.příklad Příklad budu řešit pomocí principu inkluze a exluze

Počet všech možností je

$$\binom{6\cdot 4}{4!4!4!4!4!4!} = \frac{24!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$$

Počet možností když jsou v k druzích všechny cibule vedle sebe je

$$\frac{(24-3k)!}{4!^{6-k}}$$

Když vyberu určitou k-tici a použiji princip inkluze a exluze dostávám:

$$\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\frac{(24-3k)!}{4!^{6-k}}\binom{6}{k}$$