- *#1: 06/10/2*

- **Úvod**
  - vyučující
    - Petr Kolman, kabinet aplikované matematiky
    - pondělí dopoledne konzultace, nebo mail
  - témata
    - soustavy lineárních rovnic (obecněji než na gymnáziu)
    - později
      - lineární zobrazení (?)
  - minimální sylabus, základní věci, na zkoušku nestačí, ale přehled
    - autor: Matoušek (od Tůmy, trochu jiné)
    - lze najít na netu (Google: "Petr Kolman")
    - učebnice: (?) Bečvár
  - cvičení
    - dostanu od cvičícího zápočet
    - když mám zápočet: zkouška (písemná u Kolmana)

- **Lineární rovnice a jejich soustavy**
  - soustava
    - zadání
      - $2x - y = 1$
      - $x + y = 5$
    - řešení
      - grafické řešení (průsečík přímek popsaných rovnicemi)
      - jiné řešení: vektory (‚řádky', ne ‚sloupce')
        - $(2;1)x + (-1;1)y = (1;5)$
        - hledáme vhodné násobky vektorů
    - $\mathbf{R}^2$: $a_1x + a_2y = b$
      - rozbor případů
        - pro nulové buď a_1 nebo a_2 jsou řešeními přímky (pro náčrt hledáme průsečíky s osami)
        - obě 0 (podle b=?0): buď $\mathbf{R}^2$ nebo nic
    - $\mathbf{R}^3$: $a_1x + a_2y + a_3z = b$
      - rozbor případů
        - všechna $a_i \neq 0$
          - řešení rovina (pro náčrt hledáme body na osách)
      - soustava rovnic
        - Hledáme průnik rovin.
        - Rozmyslet jaká řešení mohou nastat!
  - **Definice.** *Soustava lineárních rovnic*
    - Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má tvar:
      - $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$
      - $a_{21} x_1 + a_{22} x2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$
      - …
      - $a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$
    - Kde:
      - a_{ij} jsou reálná čísla (mohla by být i třeba komplexní, ale nám stačí reálná:)), *koeficienty soustavy*
      - b_i *pravá strana*
      - x_j *neznámá*

- **Matice**
  - uspořádáná čísla (v našem případě reálná): itý řádek, jtý sloupec
  - něco jako 2rozměrné pole

- **Vektor**
  - matice velikosti $m \times 1$ (jeden sloupec)
  - různé – ale liší se jen způsobem zápisu
    - sloupcové
    - řádkové
  - pro vektor b sloupcový: b^T je odpovídající řádkový (transpozice)

- **Lineární rovnice a jejich soustavy (pokračování)**
  - mám tedy
    - *matici soustavy **A***
    - *vektor pravých stran **b***
    - *vektor neznámých **x***
    - (***A***|***b***) je *rozšířená matice soustavy* (***A*** se sloupcem navíc, v němž je ***b***)
    - (soustava je pak ***Ax*** = ***b***)
  - Gaussova eliminační metoda
    - Příklad
      - 2x + y + z = 5
      - 4x - 6y = 5
      - -2x + 7y + 2z = 5
    - Řešení
      - 2 fáze
        - 1.
        - 2.
    - Potenciální problémy Gaussovy metody.
      - více neznámých než rovnic
      - někdy je třeba prohodit rovnice (když třeba nemám neznámou v řádku, kde chci)
    - Místo toho si vytvoříme formální postup, který ty problémy řeší:
  - **Elementární řádkové úpravy rozšířené matice**
    - a) vynásobení i-tého řádku nenulovým číslem *t*
    - b) přičtení j-tého řádku k i-tému řádku (i!=j)
    - c) přičtení t-násobku j-tého řádku k i-tému (i!=j) (vlastně a(t), b, a(1/t))
    - d) prohození (za úkol pomocí a a b, následuje mé řešení, jestli to pochopíte;))
      - začátek i: I; j: J
      - b (i, j) i: I+J
      - a (j, -1) j: -J
      - b (j, i) j: I
      - a (j, -1) j: -I
      - b (i, j) i: J
      - a (j, -1) j: I
    - **Tvrzení 1.** Elementární řádkové úpravy (rozšířené matice) nemění množinu řešení soustavy.
      - Dokážeme (ukážeme) si pro úpravy a, b (stačí):
        - A x = b řešení R
        - po úpravě ***A x*** = ***b*** řešení S
        - chceme: R = S
          - 1. R je podm. S
          - 2. S je podm. R
        - Pozorování
          - Je-li (A|b) rozšířená matice 1. soustavy a (A'|b') r. m. nové soustavy vzniklé elementární řádkovou úpravou nebo jejich posloupností, pak existují elementární řádkové operace, které nám z nové soustavy udělají tu starou.
          - Hurá, takže nemusím dělat tohle obojí:
            - 1. R je podm. S
            - 2. S je podm. R
        - Takže dokazujeme, že každé staré řešení je řešení i té nové, zbytek (opačnou inkluzi) ‚zajišťuje' pozorování.
        - a) 1. úprava: násobení
          - mějme řešení x̄ (s pruhem) soustavy Ax=b. Chceme, aby to bylo i řešení A'x=b'
          - určitě je řešením nezměněných rovnic
          - stačí ověřit pro změněnou rovnici (i-tý řádek)
            - $t\,a_{i1}\,x_1 + t\,a_{i2}\,x_2 + \ldots + t\,a_{in}\,x_n = t\,b_i$ (všechna x s pruhem)
              - jo, to je OK, tím se řešení nezmění
        - b) 2. úprava: přičítání
          - opět stačí ověřit pro změněnou rovnici (i-tý řádek), tedy, že x̄ řeší i nový i-tý
            - $(a_{i1}+a_{j1})\,x_1 + (a_{i2}+a_{j2})\,x_2 + \ldots + (a_{in}+a_{jn})\,x_n = b_i+b_j$ (všechna x s pruhem)
            - x̄ řeší j-tou rovnici,takže 0 = bj - (a… …xn) (všechna x s pruhem)
            - tuto nulu přičteme k levé straně –> zase máme starou rovnici, a tu x̄ řeší, takže OK.
    - Rozmyslet:
      - 2 proměnné –> přímky

- elementární úpravy změní přímky –> jak?
- zůstane průsečík s (jednou) jinou přímkou, přímka se otočí kolem průsečíku

- *#2: 06/10/9 (podle sylabu, chyběl jsem na přednášce)*

- **Řešení soustav**
  - **Matice v odstupňovaném tvaru**
    - Případné nulové řádky nepředchází nenulovým.
    - Po nenulovém řádku následuje řádek s vyšším počtem nul na začátku (nebo je poslední).
  - **Pivoty**
    - Je-li matice v odstupňovaném tvaru, první nenulové prvky jsou *pivoty*.
  - **Gaussova eliminační metoda**
    - Metoda převodu do odstupňovaného tvaru (elementárními řádkovými úpravami).

- **Operace s maticemi, speciální typy matic.**
  - **Součet** (stejného typu), **násobení** (reálným číslem)
  - **Transponovaná matice** $\boldsymbol{A}^T$: a_{ij} <– a_{ji}
  - **Symetrická matice**: $n \times n$ & $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$
  - **Jednotková matice**: $\boldsymbol{I}_n$: $n \times n$ & $a_{ii} = 1$, jinak nuly
  - **Diagonální matice**: $n \times n$ & $a_{ij} = 0, i \neq j$
  - **Násobení matic**
    - $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ definováno pro
      - $\boldsymbol{A}$: $m \times n$ (n sloupců)
      - $\boldsymbol{B}$: $n \times p$ (n řádků)
    - $\boldsymbol{C}$: $m \times p$, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$
      Tedy skalární součin i-tého řádku A a j-tého sloupce B
    - Důkaz, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

- *#3: 06/10/23*

- **Soustavy lineárních rovnic (doplnění minulé př.)**
  - Značení. rank(A) = hodnost matice
    - počet pivotů (nenulových řádků) v odstupňovaném tvaru
  - špatně podmíněné soustavy
    - malá změna koeficientů –> velká změna řešení
    - příklad
      - 835x + 667y = 168 / = 168
      - 333x + 266y = 67 / = 66 (jediná změna)
      - řešení x = 1, y = -1 / x = -666, y = 834
    - představa: téměř rovnoběžné přímky –> velký posun průsečíků

- **Počítání s maticemi**
  - definice pojmů
    - **Definice.** *hlavní diagonála* (čtvercové) matice: prvky $a_{1,1}; a_{2,2}; \ldots; a_{n,n}$
    - **Definice.** *jednotková matice*: matice, která má na hlavní diagonále jedničky a jinde nuly
      - značí se $\mathbf{I}_{\mathbf{řád}}$
    - **Definice.** *transponovaná matice* k matici A (typu m×n): řádky se překlopí ve sloupce (pořadí se zachová)
      - značí se A^T
    - **Definice.** *symetrická* (čtvercová) matice A, pokud $A = A^T$
    - **Definice.** *nulová matice*: skládá se jen z nul
  - operace
    - *součet* matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ stejného typu $m \times n$ je matice $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$ takovou, že prvek je součtem prvků na stejné pozici sčítaných matic
    - *k-násobek* matice $\boldsymbol{A}$ je matice $\boldsymbol{D}$ stejného typu $(\boldsymbol{D})_{ij} = k\,(\boldsymbol{A})_{ij}$
    - Ukažte (zdůvodněte), že pro matice A a B typu m×n a číslo k platí, že:
      - (A+B)+C = A+(B+C)
      - A+B = B+A
      - A + 0 = A
      - A + (-A) = 0, kde $(-A)_{ij} = -(A)_{ij}$
      - (k l) A = k (l A)
      - k(A+B) = kA + kB

- (k+l) A = kA + lA
- *součin* matic ***A*** a ***B*** (je-li ***A*** typu *m*×*n* a ***B*** typu *n*×*p*) je **C** = ***A B*** taková, že (***C***)$_{ij}$ = skalární součin i-tého řádku A a j-tého sloupce B
  - $(C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj}$
  - **Tvrzení.** Pro matice A, B, C platí
    - $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$
      - Důkaz
        - A m×n, B n×p
        - $\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$
    - $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
      - Důkaz z Tůmových skript (omlouvám se za sníženou kvalitu obrazu;)):

Prvek na místě (i,l) v součinu $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ se tak rovná

$$\sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\Big) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} b_{jk}) c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Poslední rovnost vyplývá z komutativity sčítání a asociativity násobení reálných čísel.

Matice $\mathbf{BC} = (e_{jl})$ je typu $n \times q$. Prvek e_{jl} má podle definice násobení matic vyjádření

$$e_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl}.$$

Prvek na místě (i,l) v součinu $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ se tak rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} (b_{jk} c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Tím je důkaz asociativity násobení dokončen. □

    - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$
      - Zkusit doma (to je všechno na jedno brdo, jen se neztratit v sumách a indexech.)
    - $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$
    -
  - elementární řádkové operace pomocí násobení matic
    - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ x & x & x & x & x \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ x & x & x & x & x \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ tx & tx & tx & tx & tx \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1_{(j,i)} & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    - atd.
  - Důsledek: Je-li B matice vzniklá z A posloupností el. řádkových úprav. pak existuje čvercová matice C tak, že B = CA
  - Př. Fibonacciho čísla
    - F(0) = 0, F(1) = 1, F(i+1) = F(i) + F(i-1), pro i ≥ 1
    - (F(n+2); F(n+1)) = (F(n+1); F(n))
    - $\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$
    - $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- pro $n = 2^k$ stačí k násobení matic
- **Definice.** *inverzní matice*
  - Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice $n \times n$, Matice $\boldsymbol{B}$ je inverzní k $\boldsymbol{A}$, pokud $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$, značíme $\boldsymbol{A}^{-1}$

- *#4: 06/10/30*

- **Matice n×n**
  - **Definice.** *regulární* matice: pokud rank($\boldsymbol{A}$)=n
  - **Definice.** *singulární*: není regulární
  - **Definice.** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ je *inverzní* k $\boldsymbol{A}$, pokud $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$
    - některé matice (třeba nulová) nemusí mít inverzní
  - **Věta.** Matice $\boldsymbol{A}$ typu $n \times n$ má *inverzní* matici ⇔ je *regulární*. V takovém případě je $\boldsymbol{A}^{-1}$ jednoznačně určena a platí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$
    - Důkaz: ⇒ ∃ A^{-1}a - TODO!
      - $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$
        sloupec $e_i = (0,0,\ldots,0,1(i),0,\ldots,0)^T$
        $Ax = e_i \leftarrow$ má řešení, pro $i = 1,\ldots,n$
        $(A|I) \leftarrow$ upravujeme do odstupňovaného tvaru
      - Nikde nevyjde nulový řádek (ani na jedné straně (A|I)) ⇒ n pivotů ⇒ hodnost(A) = n
      - Ax = b má řešení ∀b tedy $Ax=e_i$ má řešení, řešení x soustavy $Ax=e_i$ dá i-tý sloupec A^{-1}
      - jednoznačnost
        - $Ax = e_i$ by dávalo dvě řešení pro dvě různé inverzní matice, a to nejde
      - z (před…)minula: *homogenní* matice
        - vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$ je nulový, tedy existuje aspoň jedno řešení $\boldsymbol{x} = 0$
        - takové řešení nazýváme *triviální*
      - Ještě zbývá, že A je inverzní k A^{-1} (z definice to neplyne)
        - $(A^{-1})^{-1} = I\,(A^{-1})^{-1} = (A\,A^{-1})\,(A^{-1})^{-1} = A\,(A^{-1}\,(A^{-1})^{-1}) = A\,I = A$
        - ale, co když pro A^{-1} není inverzní matice (není regulární)
          - je třeba ověřit: je regulární ⇔ soustava $A^{-1}\,x = 0$ má triviální řešení
          - $A(A^{-1}x) = (AA^{-1})x = Ix = x$
          - kdyby existovalo nenulové x takové, že $(A^{-1}x)$ je nulový vektor, tak vznikne spor (na pravé straně je *nenulové* x)
    - **Tvrzení.** Matice $\boldsymbol{A}$ $n \times n$ regulární ⇔ $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má právě jedno řešení
      - Důkaz
        - tam: jasné
        - zpátky: najdu A^{-1} výše popsaným způsobem
    - Spočíst $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}$ regulární:
      - ($\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$) ~ el. úpravy ~ ($\boldsymbol{I}|\boldsymbol{C}$)
      - 1 na diagonále umím (Gauss. eliminace a přenásobení)
      - vynulovat vpravo nahoře jde taky (nuluju poslední sloupec posledním řádkem atd.)
      - označme tedy $\boldsymbol{B}$ matici, která odpovídá elementárním úpravám, takže existuje:
        - $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$
        - $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{C}$
        - takže inverzní matice je matice elementárních úprav, kterými dostanu $\boldsymbol{I}$
        - Vyzkoušet!
    - **Tvrzení.** Pro regulární matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ platí
      - $(A^{-1})^{-1} = A$
      - AB je regulární
        ? 1 řešení ABx je 0
      - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
        jako transpozice součinu
      - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
      - (Důkaz doma. Snadné.)