- *#1: 07/02/21*

- **Co nás čeká**
  - Skalární součin (pokračování opakování)
  - Determinanty
  - Vlastní čísla
  - Pozitivně definitivní matice
  - Kvadratické formy
  - Lineární programování
    - Ve skutečnosti není žádné programování. Soustavy lineárních nerovnic.

- **Prostory se skalárním součinem (pokračování)**
  - Pár poznámek z opakování:
    - **Definice.** Ve vektorovém prostoru nad **C** (případně **R**), zobrazení atd. – viz minulý semestr.
    - V témže vektorovém prostoru může být více různých skalárních součinů.
    - **V** nad **C**: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$: $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle \in \mathbf{R}$
    - Cauchy-Schwarz: $|\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$
    - $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cdot \cos\varphi$
    - Kolmost (ortogonalita).
    - Ortonormální báze – souřadnice vzhledem k ní se lépe hledají, není třeba řešit soustavu rovnic.
    - Pozorování: Každý systém vzájemně kolmých nenulových vektorů je lineárně nezávislý.
      - Důkaz:
        - Uvažme $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ navzájem kolmé
        - Předpokládejme pro spor $\boldsymbol{x}_0 = \sum a_i \boldsymbol{x}_i$, $0 < \langle \boldsymbol{x}_0 | \boldsymbol{x}_0 \rangle = \sum a_i \langle \boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{x}_0 \rangle = 0$ (z kolmosti) – spor.
    - Fourierovy koeficienty
  - **Definice.** Nechť **V** je podprostor vektorového prostoru **W** a $Z = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ je ortonormální báze **V**. Pak zobrazení $P_{\mathbf{V}}(\boldsymbol{u}) = \sum \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle \, \boldsymbol{v}_i$ se nazývá ortogonální projekce **W** na **V**.
    - Příklad:
    - $\mathbf{W} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{V} = \{(x_1, x_2) : x_1 - 2x_2 = 0\}$
    - Ortonormální báze **V**: $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1)/\sqrt{5}$
    - Mějme vektor (4, 3), $P_{\mathbf{V}}((4,3)) = \langle (4,3) | (2, 1)/\sqrt{5} \rangle \cdot (2, 1)/\sqrt{5}$ zřejmě$\in$**V** a vyjde to tak, že spojnice bodu a obrazu je kolmá na všechny vektory báze **V**, a ještě je spojnice nejkratší možná. Viz následující tvrzení(čko):
  - **Tvrzeníčko.** Pro každé $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}$ platí $\forall i=1, \ldots, n$: $(\boldsymbol{u} - P_{\mathbf{V}}(\boldsymbol{u})) \perp \boldsymbol{v}_i$
    - Důkaz:
      - $\langle \boldsymbol{u} - P_V(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u} - \sum \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle \, \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle - \langle \sum \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle \, \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle - (\sum \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle) \langle \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle - \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle = 0$
  - **Tvrzení.** $\forall \boldsymbol{z} \in \mathbf{V}$: $\|P_{\mathbf{V}}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\| \leq \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{u}\|$
    - Důkaz:
      - Nechť
        - $\boldsymbol{a} = P_V(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}$
        - $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{z} - P_V(\boldsymbol{u})$
      - Stačí $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \geq \|\boldsymbol{a}\|^2$ (TODO je to vidět z obrázku, dokreslit)
      - $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \langle \mathrm{b}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} | \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle =$
        $= \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} \rangle =$
        $= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\geq 0) + (0?$ – viz dál$) + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} \rangle$
      - Pozorování: $\boldsymbol{b}$ je LK $(\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n)$, víme $(PV(u)-u) \perp v_i$ $\forall i=1,\ldots,n$
      - $\Rightarrow a \perp b$
      -
  - **Věta.** V každém konečně-dimenzionálním vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.
    - Důkaz:
      - Gram-Schmidtova ortonormalizace – alogoritmus pro převod libovolné báze na ortonormální.

- Mějme bázi ($\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$).
- Postup slovy
  - Vezmu první vektor, znormalizuju.
  - Pro všechny další vektory:
    - Vezmu vektor, projektnu(?) ho na „hotové“ vektory, jeho projekci od něj odečtu. Pak ho znormalizuju.
- Postup formálně
  - Pro $i = 1, \ldots, n$ prováděj:
    - $\boldsymbol{y}_i := \boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$
    - $\boldsymbol{v}_i := \boldsymbol{y}_i / \|\boldsymbol{y}_i\|$
- Důkaz správnosti postupu:
  - Indukcí podle i, na konci iterace i : $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ jsou navzájem kolmé. Jednotková velikost je zřejmá.
  - Nenastane dělení nulou: $\|\boldsymbol{y}_i\| \neq 0$?
  - $L(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i) = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$?
  - První krok: $i = 1$
    - $\boldsymbol{v}_1 \neq 0$, $L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{x}_1)$
  - Indukční krok: platí pro $1, \ldots, i-1$, ověřme pro i
    - Ověřme, že $\boldsymbol{v}_i$ (resp. $\boldsymbol{y}_i$) je kolmý na předešlé: To je přece naše tvrzeníčko! :o)
    - Ověřme, že $L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i) = L(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i) = L(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \boldsymbol{y}_i)$:
      - $\boldsymbol{y}_i$ je lineární kombinace y_i a x_i, takže a x_i můžeme vyměnit za y_i (lemma o výměně) a pak znormalizovat (tím se lineární obal nezmění)
    - Ověřme, že $y_i \neq 0$: Víme přece, že počítáme z nezávislých vektorů.

- *#2: 07/02/28*

- **Vektorové prostory se skalárním součinem**
  - Pozorování: Je-li **W** podprostor prostoru **V** dimenze n, pak každou ortonormální bázi **W** lze rozšířit na ortonormální bázi prostoru **V**.
    - Důkaz: Bázi **W** doplním (dle Steinitzovy věty) na bázi **V**: $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$. Na této bázi provedeme Gram-Schmidtovu ortonormalizaci (týká se jen u1 až ul), dostaneme $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ – ortonormální bázi **V**.
  - **Definice.** Nechť **W** je množina vektorů ve vektorovém prostoru **V**. Pak *ortogonální doplněk* množiny **W** je množina $\mathbf{W}^\perp = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{W}: \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{v} \}$.
    - Příklad: $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$
      - $\mathbf{W} = \{(1, -1)\}$, $\mathbf{W}^\perp = \{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$
      - $\mathbf{W}_3 = L(\mathbf{W})$: stejné
      - $\mathbf{W}_3 = \{(1,0), (0,1)\}$: $\mathbf{W}^\perp = \{(0, 0)\}$
  - Pozorování: $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V}^\perp \subseteq \mathbf{U}^\perp$ (opačné pořadí)
    - Důkaz: zřejmý
  - Pozorování: $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0$ (homogenní soustava) – řešení je kolmé na všechny řádky **A**, tedy i na celý řádkový prostor. $\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x}=0\} = (R(\mathbf{A}))^\perp$.
  - **Věta.** Nechť **W** je vektorový podprostor prostoru **V** konečné dimenze. Pak platí:
    - (i) $\mathbf{W}^\perp$ je podprostor **V**.
    - (ii) $\dim(\mathbf{W}) + \dim(\mathbf{W}^\perp) = \dim(\mathbf{V})$
    - (iii) $(\mathbf{W}^\perp)^\perp = \mathbf{W}$ (pozor, platí jen pokud **W** je prostor!)
    - (iv) $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\perp = \{0\}$
  - Důkazy předchozí(ch) vět(y):
    - $u, v \in W^\perp$, $u+v \in ?W^\perp$
      - (i) Nechť $x \in W$: $(u+v) \perp x$, protože $\langle u+v|x \rangle = \langle u|x \rangle + \langle v|x \rangle = 0 + 0 = 0$. Obdobně násobení konstantou.
      - (ii) $\mathbf{X} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ nějaké ortonormální báze **W**. Rozšiřme **X** na ortonormální bázi celého prostoru **V**: $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l)$. Chceme $\mathbf{W}^\perp = L(\boldsymbol{y}_1, \ldots \boldsymbol{y}_l)$, dokažme tu rovnost:
        - Inkluze $\subseteq$

- Vezměme v ∈ **W**⊥ ⊆ **V**; $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j \boldsymbol{y}_j$. Počítejme souřadnice $\boldsymbol{v}$ vůči bázi ($\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{y}_1$, …, $\boldsymbol{y}_l$), souřadnice u $\boldsymbol{v}_i$: $a_i = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v}_i \rangle = 0$, takže $\mathbf{v} = 0 + \sum_{j=1}^{k} b_j \boldsymbol{y}_j$. Hotovo.
- Inkluze ⊇
  - $\boldsymbol{v} = L(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l)$, jakákoli kombinace ypsilonů je kolmá na všechna v_i díky ortonomormalitě ($\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{y}_1$, …, $\boldsymbol{y}_l$).
  -
- (iii) $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = L(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l)^{\perp} = L(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$ – viz postup předchozího důkazu.
- (iv) Sporem, nechť ∃ $0 \neq v \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp}$:
  - $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$ netriviální
  - $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{l} b_j \boldsymbol{y}_j$ netriviální
  - Pak $0 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{l} b_j \boldsymbol{y}_j$, spor – máme bázi.
- Definice. Čtvercová matice A se nazývá orotogonální (vlastně by bylo lepší říkat ortonormální, ale neříká se to), pokud $A A^T = I$. To znamená, že řádky a sloupce jsou na sebe kolmé a ještě mají jednotkovou velikost.
- Pozorování: Matice je ortogonální ⇔ $A^{-1} = A^T$.

- **Determinanty**
  - **Definice.** *Permutace* množiny X je vzájemně jednoznačné zobrazení $p: X \to X$. S_n = množina všech permutací množiny {1, …, *n*}.
  - **Definice.** *Inverze* permutace *p* je dvojice (i, j) takové, že i<j &p(i) > p(j). Inverze jsou tedy „křížení šipek“. I(*p*) je množina všech inverzí permutace *p*.
  - **Definice.** Znaménko permutace $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^{|I(p)|}$
  - **Tvrzení.** $\mathrm{sgn}(p \circ q) = \mathrm{sgn}(p) \cdot \mathrm{sgn}(q)$
    - Důkaz: *p* … lichý počet inverzí, *q* … sudý počet inverzí.
      - *p* bez křížení, *q* s křížením ⇒ křížení
      - *p* s, *q* bez ⇒ křížení
      - jinak bez křížení
      - Mějme tedy počty křížení jeden lichý, druhý sudý, potkají se buď sudě-krát nebo liše-krát a vyjde to (no fakt).
      - TODO dorozmyslet.
  - **Definice.** Nechť A je čtvercová matice *n*×*n* nad tělesem **T**. Pak číslo $\mathrm{Det}(A) = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$ nazveme *determinant* matice A.
  - Příklad:
    - Det(ab/cd) = ad - bc
      - Sn = { (1 2 nad 1 2), (1 2 nad 2 1) }
  - Pozorování: A má v levém dolním trojúhelníku nuly. $\mathrm{Det}(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (jinak se součin trefí do nul, takže se to požere)
  - Pozorování: $\mathrm{sgn}(p) = \mathrm{sgn}(p^{-1})$
  - Pozorování: $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T)$
    - Důkaz: $\det(A^T) = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$ = (označme $q=p^{-1}$) $\sum_{q \in S_n} \mathrm{sgn}(q) \prod_{j=1}^{n} a_{j,q(j)} = \det(A)$
  - Pozorování: Přerovnání řádků podle permutace *p* se znaménko determinantu změní (sgn(*p*) = -1) nebo nezmění.
    - Rozmyslet TODO.

- *#3: 07/03/07*

- **Determinanty (pokračování)**
  - Pozorování: Přerovnání řádků podle permutace *q* se znaménko determinantu:
    - změní sgn(*q*) = -1
    - nezmění sgn(*q*) = +1
    - *q* (jedno křížení, změna znaménka):
      - 1 2 3
        2 1 3

- A:
  - $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{matrix}$
- A':
  - $\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{matrix}$
- Důkaz:
  - $\det(A') = \sum_{p \in Sn} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a'_{i,p(i)} = \sum_{p \in Sn} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q\text{^}(-1)(p(i))} =$
    = (násobíme chytře zapsanou jedničkou) =
    $= \sum_{p \in Sn} \mathrm{sgn}(q)\ \mathrm{sgn}(q^{-1})\ \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q\text{^}(-1)(p(i))} =$
    $= \mathrm{sgn}(q) \sum_{p \in Sn} \mathrm{sgn}(q^{-1} \circ p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q\text{^}(-1)(p(i))} =$
    $= \mathrm{sgn}(q) \sum_{(q\text{^}(-1) \circ p) \in Sn} \mathrm{sgn}(q^{-1} \circ p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q\text{^}(-1)(p(i))} = \mathrm{sgn}(q) \det(A)$
  - TODO LaTeX, aby to hezky vypadalo
- Hra: Čtyři na gauči (permutace). TODO dohledat pravidla. Je to strašná pařba.
- Důsledek: Totéž platí pro prohazování řádků (transpozice determinant nezmění).
- Důsledek: Prohozením dvou řádků se změní znaménko determinantu.
- Důsledek: Pro každou matici A se dvěma stejnými řádky: det(A)=0 (Jediná možnost, aby se „měnilo znaménko“, když ty řádky prohodím.)
- Značení: A_{ij} podmatice A vzniklá vynecháním řádku i a sloupce j
- Lemma (o rozvoji). Pro matici A n×n, každé i=1 , …, n: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$
  - Důkaz
    $$\det \begin{pmatrix} a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{i1}\ 0 \dots 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0\ a_{i2}\ 0 \dots 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} 0 \dots 0\ a_{in} \\ \\ \\ \end{pmatrix} =$$
  - $$= \sum (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 0 \dots a_{ij} \dots 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$
  - TODO zbytek opsat ze skript, sylabu (nestihl jsem)
- Důsledky pro elementární řádkové úpravy
  - Násobení řádku *i* číslem *t* násobí determinant číslem *t*.
    - Důkaz: jasné.
  - Přičtení *t*-násobku řádku *j* k řádku *i* determinant nezmění.
    - Důkaz: Z A přičtením získáme A'. Rozvoj dle *i*-tého řádku: det(A') =
      $= \sum_{l=1}^{n} (a_{il}+a_{jl})(-1)^{i+l} \det(A_{il}) =$
      $= \sum_{l=1}^{n} a_{il}(-1)^{i+l} \det(A_{il}) + \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(-1)^{i+l} \det(A_{il}) = \det A + 0 = \det A$
    - S *t*-násobkem to vyjde obdobně.
- Důsledek: Čtvercová matice A je regulární právě když det A ≠ 0 (lze EŘÚ převést třeba na jednotkovou beze změny determinantu).
- **Jak lépe spočíst determinant:**
  - Upravíme do trojúhelníkového tvaru a pamatujeme si, jak nám úpravy změnili determinant. Pak spočteme determinant trojúhelníkové matice a dle potřeby přenásobíme.
  - Determinant trojúhelníkové matice je součin čísel na diagonále.
- **Geometrický význam determinantu**
  - Kosodélník se stranami (a_{11}, a_{12}) a (a_{21}, a_{22}) má obsah rovný determinantu matice s odpovídajícími prvky. Snadno se ukáže pro obdélníky a pak se kosodélník „napřímí“. A takhle to funguje i ve více dimenzích.
  - Pozorování: Objem rovnoběžnostěnu daného vektory $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}^n$ je roven determinantu matice s těmito vektory jako řádky.

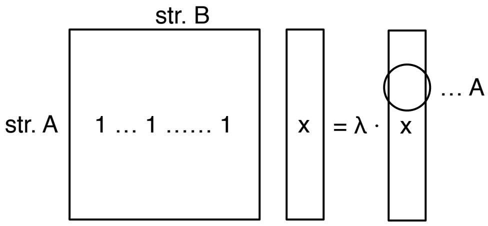
- **Věta** (o násobení determinantu). Pro každé čtvercové matice A, B n×n: det(A·B) = det(A) · det(B).
  - Důkaz:
    - A: singulární matice: nuly, jasné.
    - A: regulární matice: EŘÚ → jednotková a naopak, tedy mohu A získat pomocí EŘÚ z I ⇒ A = $E_1 \cdot \ldots \cdot E_l \cdot I$
      - Vynásobení řádku *i* číslem *t*: Násobení jednotkovou maticí, co má akorát na pozici i,i číslo t, det(E) = t.
      - Přičtení řádku j k řádku i: … (na diagonále jedničky a někde mimo další jednička): det(E)=1
      - Takže: $\det(AB) = \det(E_1 \cdot \ldots \cdot E_l \cdot B) = \det(E_1) \cdot (E_2 \cdot \ldots \cdot E_l \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
      - Pozorování použité v postupu: Pro A = „matice EŘÚ" – jasné.
- **Tvrzení.** Lineární zobrazení *f*: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ odpovídající matici A promění jednotkovou krychli na rovnoběžnostěn a rovnoběžnostěn určený sloupcovými vektory A a mění objem obecné množiny det (A)-krát.

- *#4: 07/03/14*

- **Determinant a objem (doplnění)**
  - det(A·B) = det(A) · det(B)
  - A = matice s řádky A_1 až A_n, nechť ∀i,j $A_iA_j = 0$, a vektory určují rovnoběžnostěn
  - $\|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdot \ldots \cdot \|A_n\| = \sqrt{}$(det(matice, která má druhé mocniny norem A_1 až A_n na diagonále)) = $= \sqrt{}$ (det(součin matice s řádky A_1 až A_n a matice se sloupci A_1 až A_n)) = I det A I
  - Gram-Shchmidtova ortogonalizace (ne ortonormalizace!) nezmění objem rovnoběžnostěnu, resp. determinant

- **Determinant jako součet podmatic**
  - **Věta (o inverzní matici).** Pro regulární čtvercovou matici A platí, že $(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}) / \det(A)$, kde A_{ji} je matice vzniklá z A vynecháním *j*-tého řádku a *i*-tého sloupce.
    - Důkaz:
      - ∀i: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ dle věty o rozvoji
      - Označme B matici: $(B)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$
      - $(AB)_{ik}$ = (součin j-tého řádku A a k-tého sloupce B) = $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \det(A_{kj})$ =
        - pro i = k: = det(A) (stačí nahradit *k i*)
        - pro i ≠ k: = det(A') (viz dále) = 0
      - rozvoj A dle k: $\sum_{j=1}^{n}$ (-1)k+j $\det(A_{kj})$, A' je stejná, ale místo řádku i má řádek k, má tedy nulový determinant, z toho plyne, že pro i≠k vyjde $(AB)_{ik} = 0$.
      - TODO projdi, promysli…
  - **Věta (Cramerovo pravidlo).** Je-li A regulární matice, pak jediné řešení A***x*** = ***b*** má *i*-tou složku rovnou:
    $x_i = \det(A_{b\to i}) / \det(A)$, kde $A_{b\to i}$ je matice vzniklá z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem ***b***.
    U Tůmy Tvrzení 9.19
    - Důkaz: Pro regulární matici A platí: $x = A^{-1} \cdot b$, tedy $x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} \cdot b_j$ = (podle věty o inv. m.)
      $= 1/\det(A) \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ji}) \cdot b_j = 1/\det(A) \cdot \det(A_{b\to i})$ (rozvoj $\det(A_{b\to i})$ podle sloupce i) =
      $= \det(A_{b\to i}) / \det(A)$

- **Vlastní čísla a vlastní vektory**
  - Motivace: Google
    - Mějme „matici sousednosti" webových stránek (spojení odkazy).
    - Čím víc stránek na stránku odkazuje, tím lépe, a ještě se to převáží podle váhy odkazujících stránek (he, trochu rekurze…).
    - Jak na to:
      - Chceme: váha A = součet vah stránek ukazujících na A

- 

  Podrobně viz Tůma, část 15.
- **Definice.** Nechť **V** je vektorový prostor nad tělesem **T** a *f*: **V**→**V** je lineární zobrazení. Pak $\lambda \in T$ se nazývá *vlastním číslem* lineárního zobrazení *f*, právě když existuje vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ takový, že $f(\boldsymbol{v}) = \lambda v$. *Vlastní vektor* příslušný k vlastnímu číslu λ je každý *nenulový* vektor v splňující $f(\boldsymbol{v})=\lambda v$.
- Příklad: $\mathbf{V}=\mathbf{R}^2$, f: f(x,y) = (-y,-x)
  - $\lambda_1 = 1$: násobky (-1, 1)
  - $\lambda_2 = -1$: násobky (1, 1)
- Pozorování: Je-li $\boldsymbol{v}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ, a $t \in T$, pak i $t \cdot \boldsymbol{v}$ je vlastní vektor příslušný k λ.
- **Definice.** Je-li A čtvercová matice nad tělesem **T**, pak číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ se nazývá vlastním číslem A, právě když existuje nenulový vektor $\boldsymbol{v}$ takový, že $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Tedy obdobně jako u zobrazení (včetně vlastních vektorů.)
- Pozorování: λ je vlastní číslo A $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I) = 0$.
  - Důkaz: $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A-\lambda I)v = 0$, hledáme řešení $A-\lambda I$ – má jedno řešení (v) $\Leftrightarrow$ je singulární $\Leftrightarrow$ $\det (A-\lambda I) = 0$.
- **Věta.** Nechť f je lineární zobrazení, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla f a $x_1, \ldots, x_k$ jsou vlastní vektory příslušné těmto číslům. Pak $x_1, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé.
  - Důsledek: Omezení shora počtu vlastních čísel dimenzí prostoru.
  - Důkaz (indukcí podle k)
    - k=1: $x1\neq0$ je lineárně nezávislý
    - $k-1 \Rightarrow k$
      - Uvažme lineární kombinaci takovou, že $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$. Chceme odvodit $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$
      - $0 = f(0) = f(\sum_{i=1}^{k} aixi) = (f \text{ je lineární}) \sum a_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i x_i$
      - $0 = 0\text{-}0 = f(0) - 0\, \lambda_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_k x_i = \sum_{i=1}^{k-1} ai\, (\lambda_i-\lambda_k)\, xi$
      - Přitom x1, …, xl jsou lineárně nezávislé dle indukčního předpokladu, $\lambda_i\neq\lambda_k$, takže koeficienty musí být nulové.
      - $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0 \Rightarrow a_k x_k = 0\ (x_k\neq0) \Rightarrow a_k = 0 \Rightarrow x_i$ jsou lineárně nezávislé.
  - Důsledky: Čtvercová matice $n\times n$ má nejvýše *n* vlastních čísel.
  - **Definice.** Čtvercové matice A a B se nazývají podobné, pokud existuje regulární matice R, pro niž platí, že $A = R^{-1} \cdot B \cdot R$ (resp. $B = R \cdot A \cdot R^{-1}$).

- *#5: 07/03/21 (podle skript a jiných poznámek)*

- **Vlastní čísla a vlastní vektory**
  Chyběl jsem, takže následující poznámky jsou z Tůmových skript a starých psaných poznámek stažených z webu – obsah se snad více méně kryje s tím, co se na přednášce dělalo.
  - **Věta.** Jsou-li A a A' podobné matice (tj. $A' = R^{-1} \cdot A \cdot R$), λ je vlastní číslo A a $\boldsymbol{x}$ je příslušný vlastní vektor, pak λ je také vlastní číslo A' a $\boldsymbol{y} = R\boldsymbol{x}$ je příslušný vlastní vektor.
    - Důkaz:
      - Chceme ukázat: $A'\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$
      - $A'\boldsymbol{y} = (RAR^{-1})(R\boldsymbol{x}) = RA\boldsymbol{x} = R\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$
  - **Definice.** Matice je *diagonalizovatelná*, je-li podobná nějaké diagonální matici.
  - Pozorování: Je-li D diagonální matice, pak vlastní čísla matice D jsou právě čísla na diagonále.
  - **Tvrzení.** Má-li matic A $n\times n$ *n* navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.
    Neplatí obráceně!
    - Důkaz: TODO PICT4099.jpg
  - **Tvrzení.** Matice A $n\times n$ je diagonalizovatelná právě, když má *n* lineárně nezávislých vlastních vektorů.

- Důkaz: TODO PICT4100.jpg
- Pozorování: Je-li
  - A matice lineárního zobrazení *f*: V→V vůči bázi B a
  - A' matice lineárního zobrazení *f*: V→V vůči bázi B',
  - pak A a A' jsou podobné.
- **Definice.** Je-li A čtvercová matice řádu n nad **T**, pak pro všechna $t \in$ **T** definujeme hodnotu $p_A(\lambda) = \det(A - t\,I_n)$. Funkci $p_A(t)$ nazýváme *charakteristický mnohočlen* matice A. Rovnici $p_A(t) = 0$ nazýváme charakteristická rovnice matice A.
- **Věta.** Číslo $\lambda \in$ **T** je vlastním číslem A ⇔ λ je kořenem $p_A(t)$.
  - Důkaz apod. TODO PICT4101.jpg
- *#6: 07/03/28*

- **Vlastní čísla a vlastní vektory**
  - ?? Co znamenají násl. řádky? (Pozdní příchod.)
  - $Av = \lambda v$, v!=0
  - podobně ∃ regulární R
    - $A=R^{-1}A'R$, resp. $A'R = RA$
    - diagonalizovatelná A. A je podobná diagonální
  - Pozorování. Je-li λ vlastní číslo matice A a ***u*** je vlastní vektor, pak λ^k je vlastní číslo A^k a ***u*** je vlastní vektor A^k. Navíc je-li A diagonalizovatelná, tj. $A=R^{-1}DR$ (D diagonální), pak A^k je diagonalizovatelná. $A^k=R^{-1}D^kR$.
  - Důkaz:
    - A^kv (***v*** vl. vektor A) $= A^{k-1}\lambda v = \lambda^k v$
    - $Ak=(R^{-1}DR)^k = R^{-1}D^kR$
  - Charakteristický polynom A
    - $\det(A-tI) = p_A(t)$
    - A, B podobné ⇒ $p_A(t) = p_B(t)$
      - **Pozor:** implikace opačným směrem neplatí!
        - Např. A= (1 0 / 0 1), B=(1 1 / 0 1)
  - Poznámka: (Tu jsem moc nezachytil, něco s tím, že víme, co má diagonální matice na diagonále, ale ne v jakém pořadí)
  - Poznámka: diagonalizovatelnost nesouvisí s regularitou.
    - A = (3 1 / 0 3) regulární, nediagonalizovatelná
    - B = (1 1 / 1 1) neregulární, diagonalizovatelná
  - **Tvrzení.** Pro libovolné čtvercové matice A, B, n×n, platí, že AB a BA mají stejná vlastní čísla.
    - Důkaz:
      - Je-li A regulární, $\exists A^{-1}$
        - $AB = (AA^{-1})AB(AA^{-1}) = A(AA^{-1})BAA^{-1} = ABAA^{-1}$ ⇒ AB, BA jsou podobné, mají tedy vlastní čísla
      - Obecný důkaz
        - Pozorování: Pro čtvercové matice I, J, K, L, M, N, O, P $\in T^{n\times n}$ platí:
          - (I J / K L) (M N / O P) = (IM+JO IN+JP / KM + LO KN+LP) – kde matice jsou „poskládané“ z I, J, …
        - $(AB\ 0_n\ /\ B\ 0_n)\ (I_n\ A\ /\ 0_n\ I_n) = (AB\ ABA\ /\ B\ BA) = (I_n\ A\ /\ 0_n\ I_n)\ (0_n\ 0_n\ /\ B\ BA)$
        - matice vlevo a vpravo jsou tedy podobné: $(AB\ 0_n\ /\ B\ 0_n)$ a $(0_n\ 0_n\ /\ B\ BA)$
        - $\det(AB-tI_n\ 0_n\ /\ B\ -tI_n) = (-t)^n \det(AB-tI)$ (rozvoj podle posledního sloupce)
          - tedy charakteristický mnohočlen $p_{AB}(t) = \det(AB-tI)$
        - $\det(-tI_n\ 0_n\ /\ B\ BA-tI_n) = (-t)^n \det(BA-tI)$ ⇒ $p_{BA}(t) = \det(BA-tI)$
        - ⇒ stejná vlastní čísla matic AB, BA (kořeny $p_{BA}(t)$, $p_{BA}(t)$)
  - **Věta (Caley, Hamilton)**. Pro každou čtvercovou matici A platí
    - ($p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$)

- $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n$
- Důkaz: Zatím bez důkazu. Je prý dost „technický“ a používá se tam něco, co si možná už moc nepamatujeme.
- **Základní věta algebry.** Každý mnohočlen stupně aspoň jedna nad **C** má aspoň 1 kořen. (Bez důkazu.)
- Důsledek: Každý mnohočlen p(t) stupně n≥1 nad **C** lze rozložit na součin *n* lineárních činitelů:
- $p(t) = a_n(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n)$, kde $\lambda_i \in$ **C**, i=1, …, n
- Důkaz: $p(t) = Q(t)(t-\lambda)+c$, kde nutně c=0, aby to vyšlo. Takhle rozkládáme, rozkládáme, na nižší stupně.
- Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického mnohočlenu, takže v **C** se nikdy nestane, že by matice neměla vlastní čísla.
- Pro každý charakteristický mnohočlen $p(t) = a_n(t-\lambda_1)^{r1}(t-\lambda_2)^{r2}\dots(t-\lambda_k)^{rk}$, pro vhodná λ_i, r_i, λ_i navzájem různá musí platit: $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.
- **Definice.** Algebraická násobnost
  - Lze-li diagonalizovat matici A, pak:
  - A · B = B · D, kde D je diagonální matice. V diagonální matici podobné A se λ_i vyskytuje r_i-krát.
- **Tvrzení.** Matice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když $\dim(\ker(A-\lambda_i I)) = r_i$ pro i = 1, … k, kde r_i je algebraická násobnost λ_i (když ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje r_i lineárně nezávislých vektorů).
  - Pozn. $(A-\lambda_i I)x = 0 \Leftrightarrow Ax= \lambda_i x$
  - Důkaz:
    - ⇒
      - diagonalizovatelná ⇒ A má *n* lineárně nezávislých vlastních vektorů $u_1, \dots, u_n$.
      - A $(u_1 \dots u_n) = (u_1 \dots u_n)$ (na diag.: $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – které se mohou opakovat)
      - Nechť se λ_i opakuje v řádcích *h* až *j*. Pak sloupcové vektory uh až uj jsou vlastní vektory k vlastním číslům…
      - ⇒ ri vlastních vektorů k λ_i ⇒ $\dim(\ker(A-\lambda_i I)) = ri$
    - (zpátky)
      - K λ_i máme ri vlastních vektorů $v_i^1, \dots, v_i^{r\_i}$ (to nejsou mocniny). Chceme nahlédnout, že:
      - $v_1^1 \dots v_1^{r\_1}, v_2^1 \dots v_2^{r\_2}, \dots v_k^1 \dots v_k^{r\_k}$ jsou lineárně nezávislé.
      - Uvažme $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ri} a_{ij} v_i^j = 0$.
      - Označme $yi = \sum_{j=1}^{ri} a_{ij} v_i^j$ (vlastní vektor)
      - **TODO**...... to už jsem nepsal....
- *#7: 07/04/04*

- **Vlastní čísla a vlastní vektory**
  - A, n×n: $p_A(t) = \det(A-tI) = (-1)^n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0 =$
    $= (-1)n(t-\lambda_1)^{r1} \dots (t-\lambda_k)^{rk}$, r_i … násobnost λ_i
  - $p_A(0) = c_0 = \det(a) = \lambda_1^{r1}\, \lambda_2^{r2} \dots \lambda_k^{rk}$
  - A-tI = (A s téčkem odečítaným na diagonále)
  - det(A-tI) = …
    - z definice determinantu:
      - $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
    - z rovnosti $pA(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{r1} \dots (t-\lambda_k)^{rk}$
      - $c_{n-1} = (-1)^n(-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i)$
    - tedy $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i$
    - šikovné pro kontrolu počítání vlastních čísel
  - Příklad
    - A = (1 1 / 0 1); $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2$
      - $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

   - kdyby diagonalizovatelná $R^{-1}AR = I$, $A = RIR^{-1} \Rightarrow$ A není diagonalizovatelná
- **Věta.** Buď A komplexní matice nxn. Pak existuje matice J podobná A následujícího tvaru:
  - $$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 & 0 \\ & \boxed{J_2} & & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ 0 & 0 & & \boxed{J_k} \end{pmatrix} \quad \text{kde } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ 0 & & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$
  - Celkově se λ_i vyskytne na diagonále tolikrát, kolik je jeho alg. násobnost. Matice J je určena jednoznačně až na přepvrácení bloků J_i.
- Příklad: Zvláštní případ - A je diagonalizovatelná –> Jordanovy buňky –> všechny buňky velikost 1
- Příklad: J_i = (8 1 / 08), (0 1 / 0 0), (0); $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 0$
- Příklad: vektorový prostor mnohočlenů stupně nejvýše 3.
  - Báze: $(x^3, x^2, x, 1)$
  - f: lineární zobrazení $f(p) = p'$ (derivace)
  - Uvažme matici f vůči bázi B
  - $p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$
  - $[p(x)]_B = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$
  - $p'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2$
  - Uvažme matici zobrazení:
  - $[f]_B$ = (0 0 0 0 / 3 0 0 0 / 0 2 0 0 / 0 0 1 0) není diagonalizovatelná
  - Je podobná J = (něco na vedlejší diagonále = nad diagonálou) = (0 1 0 0 / 0 0 1 0 / 0 0 0 1 / 0 0 0 0)
    - R= (1 1 1 1 / 3 2 1 0 / 6 2 0 0 / 6 0 0 0)
    - TODO: Doma ověřit RA = J R
- Matice s komplexními čísly
  - C: a+bi, a-bi … komplexně sdružená čísla
    - (a+bi)(a-bi) $\in$ **R**
    - pro $x \in$ **C** : $\bar{x}$ („iks s pruhem“) číslo komplexně sdružené
  - standardní skalární součin
    - $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i =$
  - Pro matice $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ označujeme A^H matici $(A^H)_{ij}$ = sdružené(a_{ji}) – tzv. hermitovská transpozice
- Pozorování:
  - $(AB)^H = B^HA^H$ – TODO rozmyslet doma
- **Definice.** Komplexní matice $n \times n$ se nazývá hermitovská, pokud $A = A^H$ (~symetrická v **R**).
- **Definice.** Čtvercová matice $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ se nazývá unitární, pokud $A^HA=I$ (~ortogonální v **R**).
- Pozorování: Pro libovolnou hermitovskou matici A: $\forall x \in \mathbf{C}^n$ $x^HAx \in \mathbf{R}$
  - Důkaz:
    - $(x^HAx)^H = x^HA^H(x^H)^H = x^HAx \in$ R (komplexní složka A je nutně nulová)
- **Věta.** Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná a navíc existuje unitární matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonalizovatelná.
  - Příklad:
    - A = (1 1+i / 1-i 2)
    - $p_A(t) = t^2 - 3t + 2 - 2 = t(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2=3$ (podobná matici s 0, 3 na diagonále)
    - (1 1+i / 1-i 2)x = 0 – druhý řádek je (1-i)-násobek prvního, takže:
    - např $(1+i\ -1)^T = x_1$ (kolmý na oba řádky)
    - A = (-2 1+i / 1-i -1)x = 0

- - např. x_2=(1, 1-i)^T
  - TODO Zkuste S^HS pro S = (x_1 x_2 (jako sloupce))
  - $\|x_1\|$ = 3
  - Vezměme R = ((1+i)/√3 1/√3 / -1/√3 (1-i)/√3)
    - TODO
      - Doma ověřit RR^H = I (unitární)
      - $R^{-1}AR$ = (0 0 / 0 3)
- Důkaz (věty výše)
  - Buď λ vlastní číslo A, x odpovídající vlastní vektor.
  - Ax = λx vynásobme zleva x^H
  - x^HAx = λx^Hx levá strana je reálná, x^Hx je reálné ⇒ λ ∈ **R**
  - Zvláštní případ: všechna vlastní čísla různá
    - Pozorování: Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům hermitovské matice jsou na sebe kolmé.
      - Důkaz:
        - $Ax=\lambda_1x$; $Ax=\lambda_2y$; $\lambda_1\neq\lambda_2$(
        - $\lambda_1x^Hy = (\lambda_1x)^Hy$ = (protože λ_1 vlastní číslo vektoru x) $(Ax)^Hy = (x^HA^H)y = x^H(Ay) = (x^Hy)\lambda_2$
        - Tedy $\lambda_1x^Hy = (x^Hy)\lambda_2$, kde λ_1, λ_2 jsou různá. ⇒ $x^Hy = 0$
        - Pro vlastní čísla $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ a vlastní vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ vezmi:
        - R = (sloupce: $\boldsymbol{x}_1/\|\boldsymbol{x}_1\|$ $\boldsymbol{x}_2/\|\boldsymbol{x}_2\|$ … $\boldsymbol{x}_n/\|\boldsymbol{x}_n\|$)
        - Pak jistě R^HR = I – R je unitární. R diagonalizuje – víme z dřívějška.
  - Obecný případ – indukcí dle *n*.
  - *n* = 1 (jasné, pracuje se jen s číslem)
  - *n*-1 → *n*
    - Označme $A_n = A \in \mathbf{C}^{n\times n}$
    - Víme, že existuje vlastní číslo λ a vlastní vektor $\boldsymbol{x} \neq 0$, BÚNO předpokládejme $\|\boldsymbol{x}\| = 1$
    - Doplňme $\boldsymbol{x}$ nějakými *n*-1 vektory na ortonormální bázi $\mathbf{C}^n$.
    - Vezměme matiic P_n = (sloupce: x, n-1 sloupců z báze)
    - $(P_n^HA_nP_n)^H = P_n^HA_nP_n$ (hermitovská) = P_n^H(v 1. sloupci: λx) = (v 1. sloupci: (λ, 0, 0 …)^T) = = (sloupce: (λ, 0, 0 …)^T , (0 …)^T, …, (0 …)^T) =

- *#8: 07/04/11*

- **Vlastní čísla, hermitovská matice, atd.**
  - Důkaz (...)
    - Chceme: Hermitovská matice diagonizovatelná pomocí unitárních: pro A hermitovskou hledáme unitární R: $R^{-1}AR$ je diagonální.
    - Indukcí: An … vlastní číslo λ, vl. vektor x, búno $\|x\|$ = 1.
    - Doplň x n-1 vektory $w_2, \ldots, w_n$ na ortonormální bázi $\mathbf{C}^n$.
      - Pn = (sloupce: x, w2, …, wn)
      - $(P_n^HA_nP_n)^H = P_n^HA_nP_n$ =
      -

λ_i	0	0
0	A_{n-1} hermitovská	
0		

      - Použij indukční předpoklad na A_{n-1}, existuje unitární R_{n-1} a diagonální D_{n-1}:
      - $R_{n-1}^HA_{n-1}R_{n-1} = D_{n-1}$

- Položme $R_n = P_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$
- Zbývá ověřit:
  - R_n je unitární
  - R_n dělá to, co má: $R_n^H A_n R_n$ je diagonální.

$$R_n^H R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1}^H & \\ 0 & & \end{pmatrix} \underbrace{P_n^H P_n}_{=I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1}^H & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = I$$

- $$R_n^H A_n R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1}^H & \\ 0 & & \end{pmatrix} \underbrace{P_n^H A_n P_n}_{\text{(už umíme)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1}^H & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1}^H & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & D_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

- Důsledek pro reálné matice: Každá symetrická reálná matice A má *n* reálných vlastních čísel (počítáno s algebraickou násobností) a navíc existuje ortogonální matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální.
  - Důkaz:
    - Reálná vlastní čísla – jasné už víme. A *je* diagonizovatelná.
    - ⇒ dle věty XY: Pro vlastní číslo λ: $\dim(\ker(A-\lambda_i I) = r_i$. (Kde $(A-\lambda_i I)$ je reálná matice.) ⇒ vlastní vektory k λ_i jsou reálné (to je vidět i bez té věty, reálná matice, má-li řešení, má reálné řešení).
- **Definice.** Buď vektorový prostor se skalárním součinem (nad **C** nebo **R**). Lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se nazývá *ortogonální*, pokud zachovává skalární součin, tj. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$
  - Poznámka, zachovává tedy úhly.
- **Věta.** Lineární zobrazení f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, kde **V** je konečně-dimenzionální prostor, je ortogonální právě, když matice *f* vzhledem k libovolné ortonormální bázi X = {x1, … xn} je unitární.
  - Pomocné tvrzení 1: Pro libovolnou ortonormální bázi X a ∀u, v ∈V platí, že $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{v}]_X^H [\boldsymbol{u}]_X$.
    - Důkaz:
      - $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{x}_i \rangle = ([\boldsymbol{u}]_X)_i$
      - $v = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$, kde $\beta_{ij} = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{x}_j \rangle = ([\boldsymbol{v}]_X)_j$
      - $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \,|\, \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j$ (s pruhem!) $\langle x_i | x_j \rangle =$
      - $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j$ (s pruhem!) $= = [\boldsymbol{v}]_X^H [\boldsymbol{u}]_X$
  - Pomocné tvrzení 2: Jsou-li A, B matice $n \times n$ a platí-li $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$: $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{y}$, pak A = B
    - $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$ (vektory s jednou jedničkou), pak $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} = a_{ij}$. Zřejmé.
  - Důkaz věty:
    - Ozn. *X* nějakou ortonormální bázi. ⇒ Předpokládáme ∀u, v ∈V : $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$

      Podle pomocného tvrzení 1: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{v}]_X^H [\boldsymbol{u}]_X = [f(\boldsymbol{v})]_X^H [f(\boldsymbol{u})]_X =$

      $= ([f]_X [v]_X)^H \cdot ([f]_X [u]_X) = [v]_X^H [f]_X^H [f]_X [u]_X \Rightarrow I = [f]_X^H [f]_X$

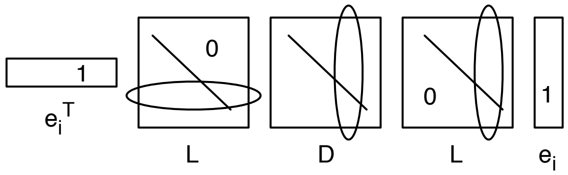
- $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{v}]_X^H [\boldsymbol{u}]_X$ = (dle PT2) $[\boldsymbol{v}]_X^H \cdot I \cdot [\boldsymbol{u}]_X = [\boldsymbol{v}]_X^H \cdot [f]_X^H [f]_X \cdot [\boldsymbol{u}]_X = [f(\boldsymbol{v})]_X^H [f(\boldsymbol{u})]_X$ = podle PT1 $= \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$

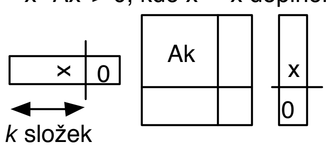
- **Definice.** Lineární zobrazení f: V→V ve vektorovém prostoru se skalárním součinem se nazývá *isometrie*, pokud ∀u∈V: $\|u\| = \|f(u)\|$.
- Pozorování: Každé ortogonální zobrazení je isometrie.
  - $\|f(u)\| = \text{sqrt}(\langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle) = \text{sqrt}(\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle) = \|\boldsymbol{u}\|$
- Lemma: Má-li reálná čtvercová matice A n×n všechna vlastní čísla reálná, pak existuje ortogonální matice T taková, že $T^{-1}AT$ je horní trojúhelníková.
  - Poznámka: Trojúhelníková matice
  - Nástin důkazu (obdoný jako minulý):
    - Indukcí podle n:
    - n=1 Ok
    - Indukční krok:
      - A n×n vlastní číslo $\lambda \in \mathbf{R}$, vezměme k němu vlastní vektor x, $\|x\|=1$. Víme, že $x \in \mathbf{R}^n$.
      - Doplníme x vektory $w_2, \dots, w_n$ na ortonormální bázi. S je matice, jež má jako sloupce vektory této báze. Počítejme:
        - ($S^TS = I$, $S^T = S^{-1}$ & sloupce jsou navzájem kolmé:)
        - $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda & ? & ? \\ 0 & A_{n-1} & \\ 0 & & \end{bmatrix}$
        - Užij indukční předpoklad na A_{n-1}: ∃ F ortogonální: $F^{-1}A_{n-1}F$ je horní trojúhelníková.
        - Položme:
          - $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F & \\ 0 & & \end{bmatrix}$
          - Ověříme:
            - T ortogonální. (…)
            - T dělá, co má. (…)

- **Pozitivně definitní matice**
  - Budou se nám hodit později v semestru.
  - **Definice.** Symetrická reálná matice A n×n se nazývá
    - pozitivně definitní, pokud pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. $x^TAx > 0$.
    - pozitivně semidefinitní, pokud pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. $x^TAx \geq 0$.
  - **Věta.** Pro čtvercovou symetrickou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní.
    - (i) A je pozitivně definitní.
    - (ii) všechna vl. čísla A jsou kladná
    - (iii) existuje regulární matice U: $U^TU = A$
      - (iii') nebo symetrická pozitivně definitní matice U
      - (iii'') nebo regulární horní trojúhelníková matice U
  - **Věta.** Obdobně pro semidefinitní.
  - Důkaz:
    - (i)⇒(ii)
      - Vezměme λ vlastní číslo, x – odpovídající vlastní vektor
      - $0 < x^TAx = \lambda x^Tx$, kde $x^Tx > 0 \Rightarrow \lambda > 0$
    - (ii)⇒(iii)
      - A je podobná nějaké diagonální matici D, která má na diagonále čísla > 0: $A = R^{-1}DR$.

- Dle předešlé věty: dokonce lze vzít R ortogonální: $A = R^T\sqrt{D}^T\sqrt{D}R$ (kde $\sqrt{D}$ je matice, s odmocněnými prvky na diagonále)
- pro $U = \sqrt{D} \cdot R$, $A = U^TU$.
- Mrknout na $U = R^T\mathrm{sqrt}(D)R$ – je symetrická, podobná diag., vl. č. kladná......

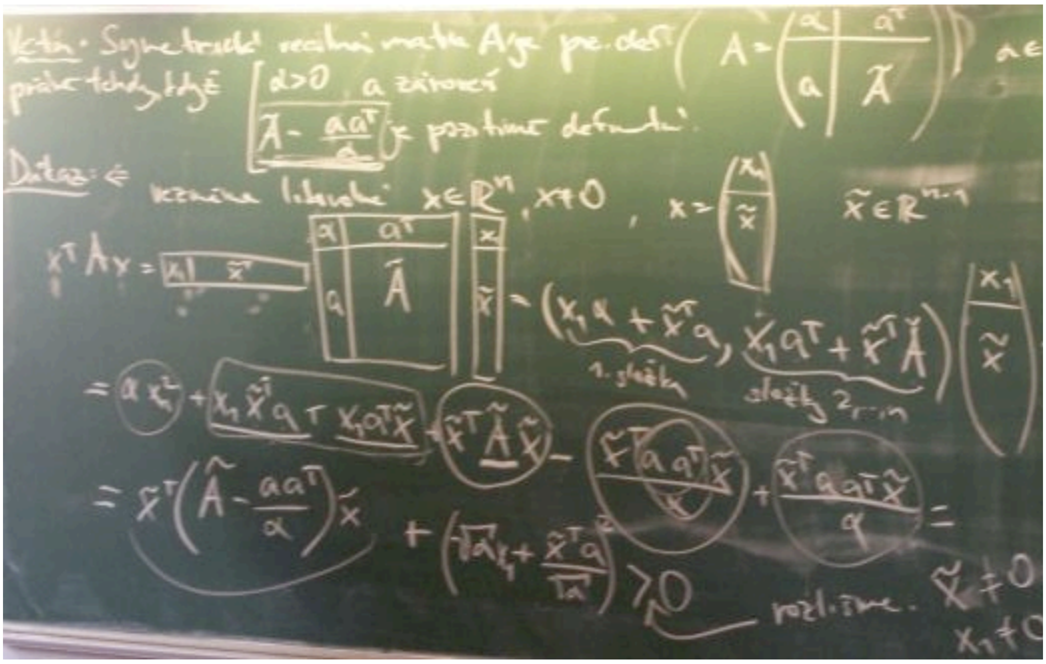
- *#9: 07/04/18*

- **Pozitivně definitní matice (pokračování)**
  - (...)
  - Choleského rozklad symetrické matice
    - Symetrickou matici lze rozložit na součin $A = LDL^T$, kde L je dolní trojúhelníková a D je diagonální.
    - TODO Rozmyslet (ke zkoušce?;)), proč to vyjde a tak:
      - Převádím matici do odst. tvaru (přičítám násobky předešlých) –> trojúh. tvar – jako bychom ji násobily zleva maticí elementárních úprav. Přitom matice elementárních úprav je taky trojúhelníková (je vidět z toho, jak řádkové úpravy fungují)
      - Příklad:
        - A = (-2 -1 0 / -1 2 -1 / 0 -1 2) ~ (2 -1 0 / 0 3/2 -1 / 0 0 4/3) –> (na diag.: 2 3/2 4/3)
        - A = (1 0 0 / -1/2 1 0 / 0 -2/3 1) (na diag.: 2 3/2 4/3) (1 -1/2 0 / 0 1 -2/3 / 0 0 1) =
          = (2 0 0 / -1 3/2 0 / 0 -1 4/3) (1 -1/2 0 / 0 1 -2/3 / 0 0 1) = (2 -1 0 / -1 2 -1 / 0 -1 2) (tradá původní matice)
  - Zpět k důkazu(?):
    - $A = LDL^T = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T) = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}^TL^T)$ – pozor diagonální musí být z kladných čísel, zřejmě to bude fungovat jen u pozitivně definitních:
    - 

    - $0 < e_i^TAe_i = e_i^TLDL^Te_i = L_{ii}D_{ii}L_{ii}T = D_{ii} > 0$, protože $L_{ii} > 0$
    - Hm?:
      - $x^TAx >? \, 0 \; \forall x \neq 0$
        - $x^TU^TUx > 0$, pže $Ux \neq 0$
  - **Věta.** Symetrická matice A je pozitivně definitní právě, když $\det(A_k) > 0$, pro k = 1, …, n, kde A_k je levá horná podmatice velikosti $k \times k$.
    - Důkaz (jen) jedním směrem:
      - Ukážeme, že $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_n$ jsou pozitivně definitní ⇒ $\det(A_k) > 0$
      - $x \in \mathbf{R}^k$, $x \neq 0$:
        - $x^TA_kx > 0$
        - $x'^TAx' > 0$, kde x' = x doplněné nulami na n složek:
      - 

      -
  - Pozorování 1: Pro pozitivně definitní matici A definuje předpis: $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^TA\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ skalární součin.
    - Důkaz: ověření axiomů (DÚ)
  - Pozorování 2: Každý skalární součin na Rn lze vyjádřit jako $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^TA\mathbf{y}$, kde A je vhodná pozitivně definitní matice.
    - Ověření pro jednotkové:
      - Položme $A_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle$; Ok: $e_iTAe_j = A_{ij}$
    - Pro obecné ověření užij vlastností skalárního součinu. (DÚ)

- Věta: Symetrická reálná matice A je pozitivně definitní: $A = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^T \\ \hline a & A\sim \\ \hline \end{array}$,

  $\alpha \in R$, $a \in R^{n-1}$, $\tilde{A} \in R^{(n-1)\times(n-1)}$, právě tehdy, když $\alpha>0$ a zároveň $\tilde{A} - aa^T/\alpha$ je pozitivně definitní.
  - Důkaz:
    - 

- **Kvadratické formy**
  - Otázka: Lze vhodnou volnou báze zjednodušit výpočet skalárního součinu x^TAy?
    - (Pro některá lineární zobrazení něco podobného umíme: diagonalizace.)
  - Definice. *Kvadratická forma* na $\mathbf{R}^n$ je každá funkce g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tvaru g(x) = ∑i=1n∑j=1n $a_{ij}x_ix_j$, pro nějaké $a_{ij} \in R$. Matice kvadratické formy je matice B taková, že Bij =
    - = a_{ij} pro i=1
    - = $a_{ij}/2$ pro i < j
    - = $a_{ji}/2$ pro j < i
  - Příklad: g(x1, x2) = $13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ = a11… + a12… + a22…
    - B = (13 5 / 5 13)
  - Pozorování:
    - Pak $g(x) = x^TBx$.
    - TODO rozmyslet.
  - Definice. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a f: V×V → T je zobrazení takové, že
    - ∀α∈T, ∀u, v ∈V: f(αu, v) = αf(u,v),
    - ∀u, v, w ∈V: f(u+v, w) = f(u,w) + f(v, w),
    - ∀α∈T, ∀u, v ∈V: f(u, αv) = αf(u,v),
    - ∀u, v, w ∈V: f(u, v+w) = f(u,v) + f(u, w).
    - Pak f je bilineární forma na V.

- *#10: 07/04/25*

- **Kvadratické formy (pokračování)**
  - Definice. f je symetrická ∀u, v ∈V: f(u, v) = f(v,u)
  - Definice. Kvadratická forma: g: V→T, ∃f bilineární forma, že ∀u∈V: g(u) = f(u, u)
  - Pozorování: V = R^2, f((x1, y1)^T, (x2, y2)^T) = x1x2 + x1y2 + y1x1 + y1y2

- $g((x1, y1)^T) = x2 + 2xy + y2$
- $f'((x1, y1)^T, (x2, y2)^T) = x1x2 + 2x1y2 + y1y2$ – jiná bilineární forma, která dává stejnou kvadratickou
- Právě jedna z bilineárních forem příslušejících dané kvadratické formě ($f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{u})$), je symetrická.

- **Tvrzení.** V je vektorový prostor nad **T**, B = (b1, b2, …, bn) je báze **V**, *f* je bilineární forma , A matice *n*×*n* nad **T**:
  - $a_{ij} = f(b_i, b_j)$
  - Pak A je matice *f* vzhledem k B.
  - Potom $\forall u,v \in V$: $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u}]_B^T \cdot A \cdot [\boldsymbol{v}]_B$
  - Důkaz:
    - $[u]_B = (u_1, \dots, u_n)^T$, $u = \Sigma_{i=1}^n u_i b_i$
    - $[v]_B = (v_1, \dots, v_n)^T$, $v = \Sigma_{i=1}^n v_i b_i$
    - $f(u, v) = f(\Sigma_{i=1}^n u_i b_i, \Sigma_{j=1}^n v_j b_j) = \Sigma_{i=1}^n u_i \Sigma_{j=1}^n v_j f(b_i, b_j)$
    - $[\boldsymbol{u}]_B^T \cdot A \cdot [\boldsymbol{v}]_B = (u_1, \dots, u_n)\, A\, (v_1, \dots v_n)^T = (u_1, \dots, u_n)\, (\Sigma_{j=1}^n a_{1j} vj, \dots, \Sigma_{j=1}^n a_{nj} vj)^T =$
      $= \Sigma_{i=1}^n u_i\ \Sigma_{j=1}^n a_{ij} v_j = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n u_i a_{ij} v_j$
- Pozorování: Bilineární forma je symetrická právě, když odpovídající matice je symetrická.
  - Důkaz
  - $\Rightarrow$: $aij = f(bi, bj) = f(bj, bi) = aji$
  - zpátky:
    - $A^T=A$: $f(u, v) = [u]_B^T A [v]_B$
    - $f(v, u) = (f(v,u))T = ([v]_B^T A [u]_B)T = [u]_B^T A^T ([v]_B^T)^T = [u]_B^T A [v]_B = f(u, v)$
- Analytické vyjádření bilineární formy:
  - $[\boldsymbol{u}]_B = (u_1, \dots, u_n)^T$
  - $[\boldsymbol{v}]_B = (v_1, \dots, v_n)^T$
  - $f(u, v) = \Sigma_{i,j=1}^n u_i v_j f(b_i, b_j)$
  - $f((u1, u2)^T, (v1, v2)^T) = u1v1 + u1v2 + u2v1 + u2v2$
  - $[u] = (u1, u2)^T$
  - A = (1 1 / 1 1)
- Lemma: $f: V\times V \to T$ bilineární forma, B báze V, A matice f vzhledem k B. Je-li B' báze V, potom matice f vzhledem k B' je $A' = [id]_{B'B}^T\, A\, [id]_{B'B}$
  - Důkaz:
    - $u,v \in V$, $[u]_B = [id]_{B'B}\, [u]_{B'}$
    - ?? $f(u, v) = [u]_B^T A[v]B = ([id]_{B'B}\, [u]_{B'})^T A([id]_{B'B}\, [v]_{B'}) = [u]_{B'}^T([id]_{B'B}^T A[id])_{B'B} = [v]B'$ (...)
- FOTO
- **Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem.** **V** je vektorový prostor konečné dimenze nad **R** a g kvadratická forma, $g: V \to R$. Potom existuje báze V prostoru V taková, že A matice g vzhledem k bázi B je diagonální a prvky na diagonále {-1, 0, 1}. Navíc počet -1, 0 ani 1 nezávisí na volbě B. (počet 1, počet 0, počet -1) = signatura g. B polární báze.
  - Důkaz:
    - (a) existence
      - B0 libovolné báze V, A0 matice g vzhledem k B0. A0 reálná, symetrická ⇒ ∃ R ortogonální: $R^{-1}A_0R$ $(= R^TA_0R)$ je diagonální.
      - $R^{-1}A_0R = R^TA_0R = D =$ (d1 … dn na diagonále) $= \tilde{D}A\tilde{D}$
      - A diagonální s 0, ±1 na diagonále:
        - $\tilde{d}_i = \sqrt{|d_i|}$ ai = sgn(di) di ≠ 0
        - $\tilde{d}_i = 1$ ai = 0 di = 0
      - $A_0 = (\tilde{D}R^{-1})^T A (\tilde{D}R^{-1})$
      - $R^TA_0R = \tilde{D}^TA\tilde{D}$

- A_0 = $(R^T)^{-1}\tilde{D}^T A \tilde{D} R^{-1} = (\tilde{D}R^{-1})^T A (\tilde{D}R^{-1})$
- A_0 = $[id]_{B\_0\ B}\ A\ [id]_{B\_0\ B}$
- B0 = $(b_1, \ldots, b_n)$
- B = $([id]_{B0B}\ b_i)_{i=1}^{n}$

- (b) jednoznačnost
  - B, B' báze, A, A' matice g vzhledem k B, B'. Báze jsou uspořádané, tak, že matice mají nejdříve (odshora) +1ky, pak -1ky, pak 0.
  - $A = [id]_{B'B}^T A' [id]_{B'B} \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$
  - počet 0 = n-rank(A) ⇒ počet 0 = (počet 0)'
  - Předpokládejme: (počet 1) = r, (počet 1)' = r' a pro spor (BÚNO) r>r'
  - u ∈ V:
    - $[u]_B = (u_1, \ldots, u_r)^T$
    - $[u]_B = (u_1', \ldots, u_n')^T$
    - n' = n - počet 0
  - g(u) = FOTO
  - $L(b1, b2, \ldots, br) \cap L(b'_{r'+1}, \ldots, b_n')$
    - dim = r + dim = u-R' = n+ r -r' > n ⇒ dim (…∩…) >0 ∃0≠x∈ (…∩…)
  - $[x]_B$ = (x1, x2, …, xn, 0, 0, …, 0)
  - [x]lB' = $(0, 0, \ldots, 0, x'_{r'+1}, \ldots, x'_n)$
  - g(x) = $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_r^2 > 0$
  - $- x'_{r'-1} - \ldots - x'_{n'} \leq 0$
  - Spor.
  - ⇒ r = r'

- *#11: 07/05/02*

- **Lineární programování**
  - Lineární programování není žádné programování.
  - Literatura
    - J. Matoušek: skripta LP
      - všechna látka a hodně aplikací
      - v Tróji
    - J. Rohn: LA a optimalizace (Karolinum '04)
    - L. Grygarová: Úvod do l. p. (SPN '75)
    - J. Dupačová: L. p. (SPN '82)
  - (Motivační úlohy ze sbírky Rychetík a spol.: Sbírka úloh z LP, SNTL 1968)
    - Typicky omezené suroviny a hledá se optimální výrobní „program“ pro továrnu
  - Úloha LP
    - Optimalizovat hodnotu *lineární* účelové funkce přes množinu vymezenou *lineárními* podmínkami.
    - Lineární účelová funkce: max $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, kde $\forall i$: $c_i \in \mathbf{R}$, $\forall x_i$ neznámé
    - Lineární podmínky: soustava lineárních nerovnic:
      - $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
      - $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$
      - …
      - $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$
      - $a_{ij}, b_j \in \mathbf{R}$
  - **Definice.** *Úloha lineárního programování* zní:
    - Nalezněte vektor $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$, jež maximalizuje *účelovou funkci* $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ (≤ po složkách vektoru)
    - Každý vektor, který splňuje $Ax \leq b$ se nazývá *přípustné řešení*. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{x}^*$ je *optimální řešení*, pokud je přípustný a navíc pro každé přípustné řešení $\boldsymbol{x}$ platí $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$
    - Moje poznámka: $\boldsymbol{c}$ je vektor $c_1, \ldots, c_n$, viz výše.

- Geometrická interpretace:
  - Každá podmínka určuje poloprostor. Přípustná řešení jsou průnikem.
  - Účelová funkce udává gradient (směr), ve kterém má co nejdále ležet optimální řešení.
- K oboru hodnot:
  - Budeme uvažovat pouze těleso **R** (kvůli uspořádání, **Q** vyjde nastejno).
  - Má smysl uvažovat **Z** – celočíselné lineární programován (ILP).
    - výpočetně těžká úloha (NP těžká)
    - přípustná řešení se redukují na mřížové body (všechny složky celé), optimum nemusí existovat nebo je na „blbém“ místě (oproti reálnému optimu)
  - Příklad rozdílu mezi LP a ILP
    - proměnné $x_1, \dots, x_n$
    - max $x_1 + \dots + x_n$
    - $\forall i\ x_i \geq 0$, $\forall i\ x_i \leq 1$
    - $\forall i,j$: $x_i + x_j \leq 1$
    - a) LP
      - opt. x1 = x2 = … = xn = 1/2
      - $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = n/2$
    - b) ILP
      - opt. x1 = 1
      - $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$
      - $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 1$
  - Podobně lze spočíst v ILP velikost maximální nezávislé množiny v grafu.
    - Nezávislá množina: vrcholy mezi nimiž nevede žádná hrana
    - Kažý vrchol: proměnná z {0, 1}
    - každá hrana: podmínka
    - účelová funkce $\sum x_i$
    - Pěticyklus:
      - $x_1, \dots x_5 \in \{0,1\}$
      - $x_1 + x_2 \leq 1$
      - $x_2 + x_3 \leq 1$
      - …
      - $x_5 + x_1 \leq 1$
      - např. (0, 0, 1, 0, 0) – přípustné, (0, 1, 0, 1, 0) – optimální (v **R** samé 1/2)
  - Jak převést libovolný tvar úlohy LP do standardního (podle definice):
    - a) Účelová funkce: min → max
      - min $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \Leftrightarrow$ max $-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$
    - b) Obrácená nerovnost u podmínky
      - nerovnost × (-1) a otočit znaménko
    - c) Podmínka zadaná rovností
      - → dvě nerovnosti
    - d) Nerovnost → rovnost & nezápornost
      - $\dots \leq b_i \Leftrightarrow \dots + x_{n+1} = b_i$ & $x_{n+1} \geq 0$
    - e) Neomezené proměné → nezáporné proměnné
      - Za x_i substituujeme $x_i = x_i' - x_i''$ nezáporná
      - Důsledek: max $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$: $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ lze převést na $\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}'$: $A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}'$ & $\boldsymbol{x}' \geq 0$
  - Možné výsledky úloh lineárního programování:
    - a) Nemá optimum, protože nemá žádné přípustné řešení.
    - b) Nemá optimum, protože hodnota účelové funkce není shora omezená. I mnohostěn pak musí být neomezený, což ale samo o sobě o optimu nic nevypovídá.
    - c) Má jednoznačné optimum.
    - d) Má nekonečně mnoho optim.
  - Vlastnosti množin řešení úloh lineárního programování:

- **Definice.** Množina $V \subseteq R^n$ je konvexní, pokud pro každé u, v $\in$ V obsahuje úsečku uv neboli {αu+(1-α)v, α $\in$ [0, 1]}
- Pozorování: Průnik konvexních je konvexní (Libovolný ∩, i nespočetný)
  - R^1: M = {všechny polopřímky, které obsahují interval [a, b]}
- Pozorování: Množina přípustných řešení je konvexní: 1 poloprostor je konvexní (ověřit z def.).
- Pozorování: Množina optimálních řešení je konvexní.
- Definice: Konvexním obalem K(X) možiny $X \subseteq R^n$ rozumíme průnik všech konvexních množin, které obsahují X, t.j. K(X) = ∩ {V: X ⊆ V & V je konvexní}
- Věta o konvexním obalu: Konvexní obal množiny X ⊆ Rn je množina všech konvexních prvků z X neboli K(X) = {u: u = ∑αixi: xi ∈X, n∈N, ai $\in R_0^T$ & ∑ai = 1}
  - Obdobné jako lineární obal.

- *#12: 07/05/09*
  Kolman se vrátil!

- **Lineární programování – Simplexová metoda**
  - viz Kolmanovy slajdy (má je na webu)
    - (LAII9kvet.pdf)

- *#13: 07/05/23*

- **Lineární programování – Simplexová metoda – pokračování**
  - Značení
    - B báze (resp. B jsou indexy x_i, které jsou v bázi)
    - x_B vektor x_i, které jsou v bázi
  - Simplexová tabulka
    - $x_B = p + Q\, x_N$ (Q matice)
    - $z = z_0 + r^T x_N$
  - Pro každou bázi B:
    - $Q = -A_B^{-1} A_N$
    - $p = A_B^{-1} b$
    - …
    - Q, p jsou určeny jednoznačně – důkaz narychlo na tabuli …
  - Lemma (optimalita). Je-li T(B) simplexová tabulka a r ≤ 0, pak příslušné bazické řešení je optimální.
    - Důkaz:
      - $z = z_0 + r\, x_n$
      - Pro libovolné přípustné řešení $\tilde{\boldsymbol{x}}$:
        - $\boldsymbol{c}^T \tilde{\boldsymbol{x}} = z_0 + r \tilde{\boldsymbol{x}}_N \leq z_0$
        - Zároveň pro bázické řešení $\bar{\boldsymbol{x}}$ k B: $\boldsymbol{c}^T \bar{\boldsymbol{x}} = z_0$
  - Přechod od báze B (T(B)) k bázi B' (T(B')).
    - Báze se liší v jedné proměnné (jednu přidám, jednu uberu): B' = (B- {u}) ∪ {v} (*u*stupující, *v*stupující)
    - Výběr vstupující proměnné do B
      - libovolnou nebazickou *v* takovou, že $r_v > 0$
        Chceme totiž zvýšit hodnotu účelové funkce.
    - Výběr ustupující proměnné do B
      - tu, co omezuje nejpřísněji tj.:
        - hledáme index *u*: $q_{uv} < 0$ a $-p_u/q_{uv} = \min \{ -p_i/q_{iv}, q_{iv} < 0\}$
        - Pozorování: Pokud takové *u* neexistuje úloha je neomezená, pže x_v je možno libovolně zvětšit, a tím zvětšit i *z* (účelovou hodnotu)
  - Lemma: Je-li B přípustná báze, pak i B' = (B-{u}) ∪ v je přípustná báze.
    - Důkaz:
      - Ověříme, že $A_{B'}$ je regulární.

        - Pozorování: $A_B^{-1}A_{B'}$ je regulární ⇔ $A_{B'}$ je reg.
        - Uvažme, že AB a AB' se liší jen v jednom sloupci, tzn. $A_B^{-1}A_{B'}$ je *skoro* jednotková matice. Jen sloupec *v* to ‚narušuje'. Tento sloupec se vyskytuje v matici Q u proměnné v.
        - Výsledná matice má v řádku *u* číslo - $u/q_{uv} < 0$.
        - Každý sloupec má 1 nenulu, každý řádek má 1 nenulu ⇒ regulární
    - Přípustnost $x_{B'}$
        - Díky volbě ustupující proměnné ⇒ $x_{B'} \geq 0$ (hurá!)
- Možný problém z' < z'' < z''; z = z'' – zacyklení TODO promyslet
    - V praxi se skoro neděje.
    - Lze určitým způsobem volit ustupující, abychom se tomu vyhnuli.
- Pozn.: Vyndanou proměnnou lze zase přidat.
- Nejvyšší možný počet kroků:
    - Triviální odhad: matice m×n ⇒ (n nad m) bází, tzn. strašně moc.
    - V praxi: ~ 4m bází
- Jak najít výchozí přípustné bazické řešení:
    - úloha P: A: m×n, x ≥ 0, búno b≥0, Ax = b
    - (→→)
    - úloha P':   (A I)(spojení sloupcových vektorů ***x*** a ***z***) = b, x≥0, z≥ 0; max($-\sum_{i=1}^{m} z_i$)
    - Pozorování: Úloha P má přípustné řešení ⇔ úloha P' má řešení takové, že $\sum_{i=1}^{m} z_i = 0$
    - Pro P' snadno najdeme bazické přípustné řešení.
    - ⇒ Umíme vyřešit P' simplexovým algoritmem.
    - $\sum z_i > 0$ ⇒ P nemá řešení
    - $\sum z_i = 0$⇒ máme přípustné bazické řešení P
- Převod úlohy na takovou, co umíme řešit simplexovou metodou:
    - Systém nerovnic
        - max $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$
        - $Ax \leq b$
        - $x \geq 0$
    - Systém rovnic
        - (A I) (x „nad" y) = b, x≥0, y≥0
        - (A ještě jeden krok k následujícímu, pokud neplatí, že x=0, y=b:)
        - (A I I) (x „nad" y „nad" z) = b, x,y,z≥0; min $\sum z_i$
- Implementace
    - Stačí si pamatovat části tabulek a další zjednodušení.
- Problém: Přesvědčit někoho, že jsme našli optimální řešení, bez vysvětlování algoritmu.
    - Úloha
        - max $2x_1 + 3x_2$
        - $4x_1 + 8x_2 \leq 12$
        - $2x_1 + x_2 \leq 3$
        - $3x_1 + 2x_2 \leq 5$
        - $x_1, x_2 \geq 0$
    - Uvažujme:
        - $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$ (horní odhad optima)
        - $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$
        - (z první a druhé rovnice * 1/3):
            - $2x_1 + 3x_2 \leq 5$
            - $(x_1, x_2) = (1, 1)$ přípustné a přitom maximum (5)
    - A teď jsem nedával pozor, takže bez komentáře
        - $\min(12y_1 + 3y_2 + 5y_3)$
        - $y_1(ř_1) + y_2(ř_2) + y_3(ř_3) \geq 2x_1 + 3x_2$
- Dualita lineárního programování

- Pro úlohu (P): „maximalizuj $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ $Ax \leq b$, $x \geq 0$, A: m×n“ je úloha „minimalizuj y^Tb, $y^TA \geq c^T$, $y \geq 0$“ *duální*.
- **Tvrzení** (slabá věta o dualitě): Pro každé přípustné řešení x, (P) a přípustné řešení *y*(D): $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq b^Ty$
  - Důkaz:
    - $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq y^TAx \leq y^Tb$
    - Každé přípustné řešení duální úlohy dává horní odhad primární nebo tak nějak...
- **Tvrzení** (silná věta o dualitě) Pokud P i D mají přípustné řešení, pak mají optimální a $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = b^Ty^*$
- Zkouška:
- od skalárního součinu do lin. prog.