Cvičení MAI – Opakování

1. Absolutní hodnota

vzdálenost bodů $a, b \in R$: $d(a,b) = |b-a|$

1) $d(a,b) \geq 0$, $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2) $d(a,b) = d(b,a)$
3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ $(\forall a,b,c \in R)$

2. $\forall a,b \in R$ platí:

1) $|a+b| \leq |a| + |b|$
2) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$
3) $a \leq c \wedge -a \leq c \Rightarrow |a| \leq c$

3. Nerovnice:

V množině reálných čísel řešte nerovnice:

a) $|x-1| < 3$; $|x+2| \geq 4$; $|x-1| < |x+5|$

$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1$, $|x^2+2x-3| \geq |x^2+3x-4|$

b) $\frac{1}{x+2} < \frac{2}{x-1}$; $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$; $x^2 - x - 2 \leq 0$;

$\frac{2 - \log x}{1 + \log x} \geq 0$; $\frac{\ln|x|}{4-x^2} \geq 0$, $\frac{1}{\log x} \geq \log x$

c) $\sqrt{x-2} + x > 4$; $\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$;

$\sin^2 x < \cos^2 x$

d) najděte definiční obory funkcí $\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$, $\sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}}$

4. Elementární funkce

načrtněte (bez užití dif. počtu) grafy funkcí:

a) $f(x) = |x|$, $f(x) = |x-1|$, $f(x) = |x-1| - |5-x|$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $f(x) = \left|\frac{x+1}{x-2}\right|$, $f(x) = \frac{1}{|x|} + 1$, $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$

c) $f(x) = \ln|x|$, $f(x) = |\ln|x||$, $f(x) = \ln x^2$, $f(x) = -\ln\frac{1}{|x|}$,

$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-2}$, $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}+1$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

e) $f(x) = e^{|x|}$, $f(x) = e^{|x-1|}$, $f(x) = e^{-|x|}$, $f(x) = e^{c+x}$,

$f(x) = e^{-x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x^2 + \ln^2 x}$, $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 2x}$,

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

5. V rovině načrtněte ~~graf~~ definiční obory funkcí

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$

$f(x,y) = \ln(\sqrt{y+1} - x)$

$f(x,y) = \sqrt{\ln\left|\frac{y-1}{x+1}\right|}$

Cvičení MAI - množiny, zobrazení

1. Operace s množinami

(A, B, C ... množiny)

Ukažte, že platí:

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cap B = A - (A - B)$, $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(iii) $\left.\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C) \\ A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}\right\}$ De Morganova pravidla

(iv) $A \subset C \wedge B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$ (? kdy $\Leftrightarrow$?)

$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

2. Zobrazení

$f: A \to B$, $M_i \subset A$, $N_i \subset B$ $(i = 1, 2)$

(i) Platí obecně následující tvrzení? Pokud některé z nich neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro které platí:

$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

$f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$

$f(M_1 - M_2) \subset f(M_1) - f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 - N_2) \subset f^{-1}(N_1) - f^{-1}(N_2)$

$f(M_1 - M_2) \supset f(M_1) - f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 - N_2) \supset f^{-1}(N_1) - f^{-1}(N_2)$

(ii) Charakterizujte zobrazení $f: A \to B$, pro které platí:

a) $\forall M \subset A: f^{-1}(f(M)) = M$

b) $\forall N \subset B: f(f^{-1}(N)) = N$

3. Spočetné množiny.

1. Definujte pojem spočetné množiny.
2. Ukažte, že Z (tj. množina všech celých čísel) je spočetná.
3. Ukažte, že platí:

   a) Sjednocení konečného počtu nebo spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.

   b) Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.

   c) Množina P všech dvojic (uspořádaných dvojic) přirozených čísel je spočetná.

   d) Množina Q je spočetná.

   e) Množina všech uspořádaných k-tic ($k \in N$, $k \geq 2$) rac. čísel je spočetná.

   f) Množina všech konečných posloupností prvků dané spočetné množiny je spočetná.

   g) Množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná množina.

4. Matematická indukce.

Dokažte (užitím matematické indukce):

1. Pro každé $n \in N$ platí:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$$

2. Pro $n \neq 3, n \in N$ platí $\quad 2^n \geq n^2$.

3. Pro $n \in N$ a $x > -1, x \in R$ platí:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

(Bernoulliho nerovnost)

4. Pro $n \in N$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots n$ platí (AG – nerovnost)

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(Návod: ukažte, že tvrzení platí pro $n = 2^k$ (mat. indukcí) a pak ukažte, že z platnosti AG nerovnosti pro $n+1$ proměnných plyne již platnost pro n proměnných)

5. Užitím základní věty algebry (tj. že každý polynom stupně $n \geq 1, n \in N$ má v C aspoň jeden kořen) a mat. indukcí dokažte, že platí:
Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v C právě n kořenů.

6. (De Morganova pravidla) $n \in N, n \geq 2$:

$$A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A - B_i)$$

$$A - \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A - B_i)$$

7. Pro $n \geq 2$, $n \in N$ platí: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

5. Supremum a infimum.

1. Zopakujte si definici suprema a infima množiny $M \subset R$ a věty o supremu (infimu)

2. Najděte suprema a infima následujících množin (mají tyto množiny maximum a minimum?)

$M_1 = \{ \frac{1}{n} ; n \in N \}$, $M_2 = \{ 1 - \frac{1}{n^2} ; n \in N \}$

$M_3 = \{ \frac{n-1}{n} ; n \in N \}$, $M_4 = \{ \frac{p}{p+q} ; p \in N, q \in N \}$

$M_5 = \{ \sin x \cdot \cos x ; x \in R \}$; $M_6 = \{ q \in Q ; q < \sqrt{3} \}$

$M_7 = \{ n^2 - m^2 ; m, n \in N , n > m \}$

3. množiny A, B – neprázdné, omezené shora i zdola; co lze říci o supremu a infimu množin:

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$

(iv) $A \oplus B = \{ a + b ; a \in A, b \in B \}$, $\ominus A = \{ -a ; a \in A \}$

4. Ukažte, že platí: $A \neq \emptyset \neq B$ a

$(\forall a \in A \ \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$

5. Ukažte, že platí tvrzení:

Nechť 1) pro $\forall n \in N$: $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle$ $(a_i < b_i)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$: $|a_{n_0} - b_{n_0}| < \varepsilon$.

Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle$ je jednobodová množina.