

Exerciții 12.12. a 14.12.

1. Limite - polen pe acorale

a) limite elementare + stimate

$$\left(\frac{1}{0}, \frac{1}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x+2)^2} \left(\frac{1}{1-x}, \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{k}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x$$

b) seruete uron

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}, \text{ l'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(kx)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin k}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin(\sqrt{x^2+x} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan \frac{k}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\arcsin(3+x)}{x^2+3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x^2-x}, \lim_{x \rightarrow 1}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad 0 \pm$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x+1))$$~~

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^x - x}{2 + \ln x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

~~$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x+1}}{1-x}$$~~

c) odhadly

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sin x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x, \quad e \cdot x(\sin x + 1)$$

$$e \cdot e^{-x} \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sin \frac{1}{x})$$

d) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

Výběr derivací!

a) základní příklady (mechanika)

$f(x) : x e^{\frac{1}{x}} + e^{-\sqrt{x}} ; \frac{2}{(x^2-1)^3} ; \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

$\arctg \frac{1}{x} ; \cos^3(2x) ;$

$\arctg(x^2) ; \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) ; \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$

$\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} ; \left(\arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) ; \ln(\cos x)$

$\ln(\arctg \sqrt{x}) ; \ln(1 + e^{-x^2}) ; x^2 \cdot \sqrt{\ln x - 1}$

$\frac{\arctg \sqrt{\ln x}}{\arctg(\ln x)} ; x^{\frac{1}{x}} ; x^{\ln x} ; x^{\sqrt{x}} ; \ln(\ln(\ln x))$

b) dvojnásobná derivace!

$f(x) = e^{\sqrt{x}} ; \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} ; \arctg \sqrt{x}$

$\sqrt{\sin x} ; \cos \sqrt{x-1} ; \sin \sqrt{x+2}$

$\sqrt{4-\ln x} ; e^{\sqrt{x+1}} ; \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

c) $(f(x)^{g(x)})'$; $x^x ; \left(\frac{x}{1+x}\right)^x ; (x^2+1)^{\sin x} ; (\sin x)^{\cos x}$
 $x^{\frac{1}{x}}$

d) pre ; $|x| ; \sqrt{|\sin x|} ; \sqrt{|x|} ; \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & |x| > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Aplisove no paribek funkcce

$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$, (melr $e^{\frac{1}{x}}$)

$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$, $x e^{-x^2}$, $\frac{x^3}{(x-2)^2}$, $\frac{x^3}{x^2-1}$

avdy $\frac{x-1}{x+1}$

avsvu $\frac{2x}{1+x^2}$, $x - 2$ avdy x

$\frac{x^2+1}{x^2-1}$
e

$x + \text{svu } x$, $x + \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x} + 4x^2$
 $-|x-1|$, $-|\frac{x-1}{x+1}|$

o ab. bodestru

$|x| e$, e

Cyflmectnikel' fee

a) avsvu (svu x) = ?
svu (avsvu x) = ?

b) ? avsvu $x + avsvu x = \frac{I}{2}$
avdy $x + avsvu x = \frac{II}{2}$

7' Hospitalovo pravilo

$\frac{0}{0}$
 $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\ln(\sin x)}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{\cos x - 1}$

$0 \cdot \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \ln x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctg \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \arctg \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$

$\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(x+1))$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctg x - \frac{1}{x}\right)$

f^g

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 4x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$