Cvičení 3. 4. 2007

① R. a N. integrál – definice

$$\int_0^1 e^x\,dx = e-1 \quad (\text{integrační součty}, \overline{\int}, \underline{\int}, \text{limita})$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$$

per partes

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx, \quad \int_1^e \ln^2 x\,dx$$

substituce

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx, \quad \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx, \quad \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx, \quad \int_{-\pi}^{7\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx \quad (\text{DÚ})$$

pozor! $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\cdot \sin\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\cdot \sin x\,dx$

a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$

② Vlastnosti R-integrálu

1) $f \in R(-a,a)$, f lichá $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
$a > 0$

$f \in R(-a,a)$, f sudá $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

2) Bez výpočtu integrálu ukažte, že

$$\int_{-1}^{2} (e^{x}-e^{-x})\,dx > 0 \quad , \quad \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0 \quad (a>0)$$

(3) Nevlastní R-integrál ($\int_a^{\infty}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}$, $\int_a^{b}$ z neomezené funkce)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx , \quad \int_0^1 x^{\alpha}\,dx , \quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx , \quad (a<b,\ a,b\in R)$$

$$(k) \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx , (k) \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx , (d) \int_0^{\infty} \cos x\,dx , (k) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx , (k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx ,$$

$$(d) \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx , (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx , (k) \int_0^1 \ln x\,dx , (k) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx ,$$

$$(k) \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx , \ a>0 , (d) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}\,dx , (k) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot x}}\,dx , (k) \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \left(\frac{\pi}{2}+1\right) , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx \quad (k)$$

Integrál buď vypočtěte nebo se pokuste rozhodnout, zda konverguje či diverguje.

(4) Integrální kritérium konvergence řad.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s} , \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1} ,$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot e^{\frac{1}{n}}$$

(5) Aplikace určitého integrálu (geometrické)

„Plošný obsah"

- obsah kruhu, obsah elipsy ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$),
- obsah oblasti $\omega = \{[x,y];\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}$
- obsah oblasti ω (rovinné), která je ohraničená grafy fcí $y=x$, $y=\frac{4}{x}$ a přímkou $x=1$

obsah omezené rovinné oblasti, ohraničené grafem fce $y=\ln x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $[1,0]$ a přímkou $x=e$.

Objem rotačního tělesa

objem koule, rotačního elipsoidu, ~~rotačního~~ kužele

objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy x rovinné oblasti ω, kde

$\omega = \{[x,y];\ 0\le x\le v,\ 0\le y\le c\sqrt{x},\ v>0, c>0\}$

$\omega = \{[x,y];\ 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \sin x\}$

$\omega = \{[x,y];\ 1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$

$\omega = \{[x,y];\ 0\le x\le 3,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\}$

(apod.).

Délka „grafu funkce"

délka kružnice; grafu fce $y=\frac{x^2}{2}$, $x\in\langle 0,1\rangle$;

délka grafu fce $y=2\sqrt{x}$, $x\in\langle 1,2\rangle$;

délka grafu fce $y=\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ $\left[\frac{1}{2}\ln 3\right]$.

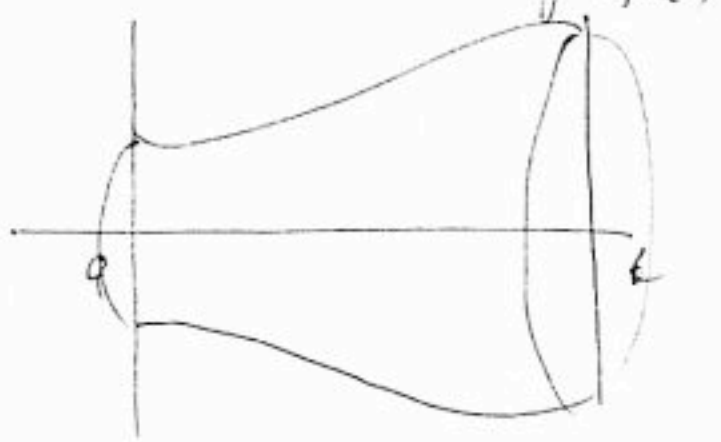
„Obsah rotační plochy"

„vzniklé rotací grafu funkce

$$y = f(x),\ a \leq x \leq b$$

kolem osy x.

1)



Ukažte, že (f, f' spojité v $\langle a,b \rangle$ nebo spojité v $\langle a,b \rangle - K$, K - konečná množina)

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

2) „Zkontrolujte" vzorce pro povrch koule, plášť kužele (o výšce v a poloměru základny r), povrch rotačního elipsoidu (vznikne rotací elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ kolem některé z os elipsy)