Cvičení 10.4. – konvergence posloupností funkcí

(1.) **Definice** $f_n \to f$, $f_n \rightrightarrows f$, $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$

a základní úvahy

(2.) Vyšetřování konvergence posloupností funkcí (obor konvergence, bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná konvergence)

Příklady:

1. (opakování) $f_n(x) = x^n$ ($f_n \not\rightrightarrows f$, ale $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$)

---

2. $f_n(x) = n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ (obor konvergence $O = R$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$)

---

3. $f_n(x) = \ln\left(\frac{x^3}{n}\right)$ ($O = \emptyset$, $D = (0, +\infty)$)

---

4. Limita spojitých funkcí nemusí být spojitá (o čem to „vypovídá"?)

a) příklad 1

b) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $D = R$, $O = R$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

---

5. Limita nespojitých funkcí může být spojitá

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{n}, & x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ v R , (limita je stejnoměrná ?)

6. Určete limity posloupností v $\langle 0,+\infty)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right)$

a) $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}$ $[\, f(x) = 0 \,]$

b) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $[\, f(x) = 0 \,]$

c) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{1+n^2x^2}$ $[\, f(0) = 0,\ f(x) = \frac{2}{x} \,]$

---

7. Rozhodněte, zda na intervalu $\langle 0,1\rangle$ konverguje posloupnost funkcí stejnoměrně:

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ [ano]

b) $f_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$ [ne]

c) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ [ne]

---

8. Ukažte, že posloupnost

a) $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0,+\infty)$

b) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ —\|\|— na $\langle 0,+\infty)$

c) $f_n(x) = x\,e^{-nx}$ —\|\|— na $\langle 0,+\infty)$

d) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ na $(0,+\infty)$ nekonverguje stejnoměrně

e) $f_n(x) = x \operatorname{arctg}(nx)$ konverguje stejnoměrně na $(0,+\infty)$

f) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně na $\langle 0,+\infty)$