Uveďte základní výsledky o Riemannově integrálu a třídě riemannovsky integrovatelných funkcí (T. 1.1–1.2, V. 1.4–1.8).

Tvrzení 1.1 (neomezené funkce nejsou integrovatelné)
Když funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ není omezená, potom nemá na $[a,b]$ Riemannův integrál (ani podle jedné definice).

Tvrzení 1.2 (nerovnosti pro $s(f,D)$ a $S(f,D)$)
Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce, D' a D jsou dělení intervalu $[a,b]$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

1. *Když D' zjemňuje D, pak $s(f,D) \le s(f,D')$ a $S(f,D) \ge S(f,D')$.*
2. *Platí nerovnost $s(f,D) \le S(f,D')$ (každá dolní suma je menší nebo rovna každé horní sumě).*
3. *Platí nerovnost*

$$m(b-a) \le s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,D') \le M(b-a).$$

Věta 1.4 (kritéria integrovatelnosti)
Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak

1. $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D:\ 0 \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$
2. $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, *že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \delta$ platí $0 \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.*

Věta 1.5 (ekvivalence Riemannovy a Darbouxovy definice)
Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní a dávají pro něj tutéž hodnotu.

Věta 1.6 (monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost)
Když je funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní (je nerostoucí nebo neklesající), potom je na $[a,b]$ riemannovsky integrovatelná.

Věta 1.7 (spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost)
Když je funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, potom je na $[a,b]$ riemannovsky integrovatelná.

Tvrzení $1.7\frac{1}{2}$ (na kompaktním intervalu: spojitost $\Rightarrow$ stejnoměrná spojitost)
Je-li $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a,b]$ spojitá, je na $[a,b]$ i stejnoměrně spojitá.

Věta 1.8 (Lebesgueova, charakterizace integrovatelných funkcí)
Funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná, právě když je na $[a,b]$ omezená a množina jejích bodů nespojitosti má míru nula.

- Každá konečná nebo spočetná množina má nulovou míru.
- Podmnožina množiny s nulovou mírou má také nulovou míru.
- Má-li každá z množin $A_1, A_2, \dots$ nulovou míru, má i jejich sjednocení nulovou míru.
- Interval s kladnou délkou nemá míru nula.

4. Uveďte výsledky o výpočetních vlastnostech Riemannova integrálu (V. 1.9–1.13).

Věta 1.9 (lin. kombinace a skládání zachovávají integrovatelnost)

1. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ a*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$
2. *Nechť $f : [a,b] \to [c,d]$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[c,d]$ spojitá. Potom $f \circ g = g(f(x)) \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Důsledky. Uvedeme několik operací, které zachovávají třídu riemannovsky integrovatelných funkcí. Důkazy si rozmyslete jako cvičení.

- Podle části 2 předchozí věty dostáváme, že pro $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i funkce $f^2, |f|$ atd. mají na $[a,b]$ Riemannův integrál.
- Proto z $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ plyne $fg \in \mathcal{R}[a,b]$—díky identitě
$$fg = \frac{(f+g)^2}{4} - \frac{(f-g)^2}{4}.$$
- Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $a \leq c \leq d \leq b$. Zúžení funkce f na interval $[c,d]$ označíme rovněž jako f a jako $\chi_{[c,d]} : [a,b] \to \{0,1\}$ označíme charakteristickou funkci podintervalu $[c,d]$, tj. $\chi_{[c,d]}(x) = 1$ pro $x \in [c,d]$ a $\chi_{[c,d]}(x) = 0$ pro $x \in [a,b]\backslash[c,d]$. Potom i $f \in \mathcal{R}[c,d]$ a
$$\int_c^d f = \int_a^b f\chi_{[c,d]}.$$

Věta 1.10 (integrál je aditivní funkce integračního intervalu)
Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $c \in [a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c] \,\&\, f \in \mathcal{R}[c,d]$ a, když příslušné integrály existují, máme
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Důsledek. *Nechť a, b, c jsou tři libovolná reálná čísla, $d = \min(a,b,c)$, $e = \max(a,b,c)$ a $f \in \mathcal{R}[d,e]$. Pak*
$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0.$$

Věta 1.11 (První základní věta analýzy)
Pro $f \in \mathcal{R}[a,b]$ definujeme funkci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pomocí
$$F(x) = \int_a^x f.$$
Funkce F je spojitá na $[a,b]$ a pro každý bod spojitosti $x_0 \in [a,b]$ funkce f platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek. *Je-li funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *spojitá na* $[a,b]$, *má na* $[a,b]$ *primitivní funkci a každá primitivní funkce* F *k* f *je tvaru*

$$F(x) = c + \int_a^x f, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta.}$$

Věta 1.12 (Druhá základní věta analýzy)
Nechť má funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a,b]$ *Riemannův integrál a primitivní funkci* F *(tj.* $F'(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$*). Potom, pro každou primitivní funkci* F, *platí*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Věta 1.12' (jiná forma 2. ZVA)
1. Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *na* $[a,b]$ *spojitá, má na* $[a,b]$ *Riemannův integrál a primitivní funkci a pro každou primitivní funkci* F *platí*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

2. Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *na* $[a,b]$ *omezená a spojitá až na konečně mnoho bodů, má na* $[a,b]$ *Riemannův integrál a zobecněnou primitivní funkci a pro každou zobecněnou primitivní funkci* F *platí*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Věta 1.13 (integrace per partes a substitucí)
(integrace per partes). Nechť funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mají na* $[a,b]$ *spojité derivace (v krajních bodech jednostranně). Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

(integrace substitucí). Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou funkce, přičemž* $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ *nebo* $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$.

1. *Nechť má* φ *na* $[\alpha,\beta]$ *spojitou derivaci* φ' *a funkce* f *je spojitá na* $[a,b]$. *Potom*
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \int_a^b f \\ \\ \int_b^a f. \end{cases}$$
2. *Nechť je* φ *na* $[\alpha,\beta]$ *rostoucí nebo klesající, má na* $[\alpha,\beta]$ *spojitou derivaci* φ' *a* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Pak opět platí rovnost integrálů v části 1.*

5. Vysvětlete, jak spolu souvisí Riemannův a Newtonův integrál (V. 1.12. a následující povídání).

Věta 1.12 (Druhá základní věta analýzy)
Nechť má funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál a primitivní funkci F (tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$). Potom, pro každou primitivní funkci F, platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Věta 1.12' (jiná forma 2. ZVA)
1. Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ spojitá, má na $[a,b]$ Riemannův integrál a primitivní funkci a pro každou primitivní funkci F platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

2. Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ omezená a spojitá až na konečně mnoho bodů, má na $[a,b]$ Riemannův integrál a zobecněnou primitivní funkci a pro každou zobecněnou primitivní funkci F platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Newtonův integrál. Funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity $\quad L = \lim_{x\to b^-} F(x)$ a $K = \lim_{x \to a^+} F(x)$.

Tento integrál pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f := [F]_a^b = L - K = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Porovnáme množinu newtonovsky integrovatelných funkcí

$$\mathcal{N}(a,b) = \{f : f \text{ má na } (a,b) \text{ Newtonův integrál}\}$$

s množinou riemannovsky integrovatelných funkcí $\mathcal{R}[a,b]$ a s množinou spojitých funkcí $\quad C[a,b] = \{f : f \text{ je na } [a,b] \text{ spojitá}\}$,

a porovnáme hodnoty příslušných integrálů.

- Platí, že $C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b] \cap \mathcal{N}(a,b)$ a $f \in C[a,b] \Rightarrow (R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$,

  to jest každá funkce spojitá na $[a,b]$ má na tomto intervalu Riemannův a (na (a,b)) Newtonův integrál a ty se rovnají.
- Má-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ Riemannův integrál a na (a,b) Newtonův integrál, mají oba integrály stejnou hodnotu.
- Množiny $\mathcal{N}(a,b) \setminus \mathcal{R}[a,b]$ a $\mathcal{R}[a,b] \setminus \mathcal{N}(a,b)$ jsou neprázdné.

6. Uveďte některé aplikace integrálů (hlavně T. 1.14 a formule pro výpočet plochy, délky křivky a objemu rotačního tělesa).

Tvrzení 1.14 (integrální kritérium konvergence řad)
Nechť $a \in \mathbb{N}$ a funkce $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, +\infty)$ nezáporná a nerostoucí, tedy i $f \in \mathcal{R}[a, +\infty)$ (podle Věty 1.6). Pak

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \quad = \quad f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots \text{ konverguje}$$

$$\iff \quad \int_a^{+\infty} f < +\infty.$$

Plocha, délka křivky a objem rotačního tělesa. Vraťme se k rovinnému útvaru $U = U(a, b, f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, kde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkce. Pro $f \in \mathcal{R}[a, b]$ je rozumné definovat

$$\text{plocha}(U) = \int_a^b f.$$

Horní hranici útvaru U tvoří křivka

$$k = k(a, b, f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b\}.$$

Jaká je její délka? Předpokládejme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci f'. Pro $x \in [a, b]$ a $\Delta > 0$, pro něž $x + \Delta \in [a, b]$, má úsečka spojující body $(x, f(x))$ a $(x + \Delta, f(x + \Delta))$ délku

$$\sqrt{\Delta^2 + (f(x + \Delta) - f(x))^2} = \Delta \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}\right)^2}.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě se poslední výraz rovná

$\Delta\sqrt{1 + (f'(c))^2}$, kde bod c ležící mezi x a $x + \Delta$. Odtud se dá odvodit, že rozumná definice délky křivky k je

$$\text{délka}(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, \mathrm{dt}.$$

Integrand je funkce spojitá na $[a, b]$ (předpokládáme spojitost první derivace), takže integrál je dobře definován.

Pro nezápornou a integrovatelnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uvažme rotační těleso $T = T(a, b, f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}$, které vznikne rotací rovinného útvaru $U(a, b, f)$ v $\mathbb{R}^3$ kolem osy x. Objem T aproximujeme součtem objemů plochých válců o poloměru $f(x)$ a tloušťce dx. Objem takového válce je $\pi f(x)^2\, \mathrm{dx}$. Takže je rozumné definovat

$$\text{objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, \mathrm{dx}.$$

7. Uveďte kritéria stejnoměrné konvergence posloupností a řad funkcí (T. 2.1–2.2, V. 2.7–2.8).

Tvrzení 2.1 (Bolzanova–Cauchyova (stejnoměrná) podmínka)
Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na množině M stejnoměrně k nějaké funkci f, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m, n > n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Tvrzení 2.2 (situace, kdy $\overset{loc}{\rightrightarrows} \Rightarrow \rightrightarrows$, respektive $\rightarrow \Rightarrow \rightrightarrows$)
Platí následující tvrzení.

1. *Když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ pro každý kompaktní podinterval $[c, d] \subset (a, b)$.*
2. *(Diniho věta) Nechť $f_n \to f$ na kompaktním intervalu I, funkce f_n i f jsou spojité a konvergence je monotónní. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na I.*

Věta 2.7 (kritéria stejnoměrné konvergence řad)

1. *(Weierstrassovo kritérium) Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, jsou takové funkce, že řada nezáporných čísel*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$$
konverguje. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.
2. *(Důsledek Diniho věty) Jsou-li funkce $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a, b]$ spojité a nezáporné a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na $[a, b]$, kde f je též spojitá, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.*

Věta 2.8 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)
Buďte dány dvě posloupnosti funkcí $f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M, když jsou splněny podmínky 1 nebo podmínky 2.

1. *(Abelovo kritérium) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M; existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|g_n(x)| < c$ (říkáme, že posloupnost (g_n) je stejně omezená); pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.*
2. *(Dirichletovo kriterium) existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)| < c$ (říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty); $g_n \rightrightarrows 0$ na M; pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.*

8. Uveďte věty o záměně pořadí operace limity s dalšími operacemi pro posloupnosti a řady funkcí (V. 2.3–2.5 a jejich verze pro řady).

Věta 2.3 (Mooreova–Osgoodova, záměna pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a $\lim_{x\to x_0}$)
Nechť jsou funkce f_n a f definované na nějakém prstencovém okolí $M = P(x_0,\delta)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který může být i nevlastní, existují vlastní limity

$$a_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x) \ \text{ a dále } \ f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ P(x_0,\delta).$$

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a rovnají se.

Důsledek. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n \rightrightarrows f$ na I, přičemž funkce f_n jsou na I spojité. Potom i limitní funkce f je na I spojitá.*

Věta 2.4 (záměna pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a integrování)
Funkce f_n, $n = 1,2,\ldots$, a f buďte definované na (omezeném) intervalu $[a,b]$, $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Pak i $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Věta 2.5 (záměna pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a derivování)
Nechť $f_n:\ (a,b) \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu. Předpokládáme, že každá funkce f_n má na (a,b) vlastní derivaci, že $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b) a že posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje pro alespoň jeden bod $x_0 \in (a,b)$. Potom $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro nějakou funkci $f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a,b).

Věta 2.3' (záměna pořadí sumace a limity v bodě)
Rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)$$

platí za těchto předpokladů: pro nějaké $\delta > 0$ máme $f_n:\ P(x_0,\delta) \to \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $P(x_0,\delta)$.

Věta 2.4' (záměna pořadí sumace a integrování)
Rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)$$

platí za těchto předpokladů: pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[a,b]$.

Věta 2.5' (záměna pořadí sumace a derivování)
Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, *je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu. Předpokládáme, že každá funkce* f_n *má na* (a,b) *vlastní derivaci, že* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ *na* (a,b) *a že řada čísel* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *konverguje pro alespoň jeden bod* $x_0 \in (a,b)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ *na* (a,b) *pro nějakou funkci* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *a* $f' = g$ *na* (a,b).

Ze silnějšího předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows g$ na (a,b) plyne opět i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a,b).

9. Uveďte výsledky o mocninných řadách (V. 2.9, T. 2.10, V. 2.11).

Věta 2.9 (o poloměru konvergence m. řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ *(*R *je nezáporné reálné číslo nebo* $+\infty$*) je definováno vztahem*
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \quad (\text{kde } 1/0 = +\infty \text{ a } 1/+\infty = 0).$$
Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ *s* $|x| < R$ *mocninná řada absolutně konverguje a pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *s* $|x| > R$ *mocninná řada diverguje.*

Tvrzení 2.10 (lokálně stejnoměrná konvergence m. řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$. *Potom*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{loc}{\rightrightarrows} \quad \text{na } (-R,R).$$
Ekvivalentně řečeno (viz část 1 Tvrzení 2.2), mocninná řada stejnoměrně konverguje na každém kompaktním podintervalu intervalu konvergence.

Důsledky. Podle předchozího tvrzení a Vět 2.3', 2.4' a 2.5' můžeme na intervalu konvergence mocninnou řadu limitit v bodě, integrovat a derivovat člen po členu. Nechť má $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kladný poloměr konvergence $R > 0$. Pak tedy
$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \quad \text{pro každé } x_0 \in (-R,R),$$
takže funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je na $(-R,R)$ spojitá. Dále, mocninné řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mají poloměr konvergence rovněž R a na $(-R, R)$ jsou funkce jimi určené (tj. jejich součty) primitivní funkcí, respektive derivací funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tuto derivaci můžeme opět člen po členu derivovat a vidíme, že $f(x)$ má na $(-R, R)$ derivace všech řádů, určené mocninnými řadami získanými derivováním původní mocninné řady člen po členu. Všechny tyto mocninné řady mají stejný poloměr konvergence R.

Věta 2.11 (Abelova věta o m. řadě)
Nechť má $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kladný a konečný poloměr konvergence R a číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje, čili mocninná řada konverguje pro $x = R$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \quad \text{na } [0, R] \text{ a } \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

10. Uveďte výsledky o Fourierových řadách (T. 2.12, V. 2.13–2.15).

Tvrzení 2.12 (ortogonální systém sinů a cosinů)
Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$ máme $\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$

Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$, pokud nejsou současně nulová, máme

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases}$$

Pro $m = n = 0$ máme $\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0$ a $\langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi$.

Věta 2.13 (Besselova nerovnost a R.-L. lemma)
Nechť $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ a čísla $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

1. *(Besselova nerovnost). Platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f^2.$$

   Speciálně, řada čtverců Fourierových koeficientů funkce f konverguje.

2. *(Riemannovo–Lebesgueovo lemma). Pro $n \to \infty$ platí, že $a_n \to 0$ a $b_n \to 0$, tedy*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\pi}^{-\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{dx} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\pi}^{-\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{dx} = 0.$$

Věta 2.14 (Dirichletova o bodové konvergenci F. řady)
Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* 2π*-periodická a její zúžení na interval* $[-\pi, \pi]$ *je po částech hladké. Její Fourierova řada pak na* $\mathbb{R}$ *bodově konverguje k funkci*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

V každém bodu spojitosti x *funkce* f *tedy její Fourierova řada konverguje k číslu* $f(x)$.

Lemma (o Dirichletově jádře)
Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a* $\quad J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$ *s* $k \in \mathbb{Z}$, *máme* $J_n(x) = \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$

a také $\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} J_n(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} J_n(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}.$

Věta 2.15 (o stejnoměrné konvergenci F. řady)
Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* 2π*-periodická a její zúžení na interval* $[-\pi, \pi]$ *je po částech hladké. Nechť je navíc* f *spojitá na* $\mathbb{R}$. *Pak je* f *na* $\mathbb{R}$ *stejnoměrným součtem své Fourierovy řady.*

Tvrzení (obecnější verze první části Věty 1.13 o per partes)
Nechť jsou funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *na* $[a, b]$ *spojité, mají s možnou výjimkou konečně mnoha bodů intervalu* $[a, b]$ *spojité derivace* f' *a* g' *a tyto derivace jsou na* $[a, b]$ *omezené. Potom* $\quad \int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$

11. Uvedte výsledky o metrických prostorech (V. 3.1-vlastnosti ot. a uz. množin).

Tvrzení (sféra není plochá)
Žádné prosté zobrazení $\quad f : T \to \mathbb{R}^n$
z horní polosféry se sférickou metrikou d *do* $\mathbb{R}^n$ *s euklidovskou metrikou* d_2 *není izometrie mezi metrickými prostory* (T, d) *a* $(f(T), d_2)$.

Věta 3.1 (vlastnosti otevřených a uzavřených množin)
V metrickém prostoru (M, d) *jsou množiny* $\emptyset$ *a* M *otevřené i uzavřené. Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Dá se ukázat, že množina je uzavřená, právě když s každou konvergentní posloupností obsahuje i její limitu.