1. Uveďte (a nedokazujte) základní vlastnosti limit posloupností (Věta, Tvrzení 2.1 až 2.5);

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)
Každá posloupnost reálných čísel má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.2 (monotonie a omezenost $\Rightarrow$ konvergence)
Je-li posloupnost $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená, je konvergentní a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}).$$

Podobně je každá nerostoucí a zdola omezená posloupnost konvegentní a infimum množiny jejích členů je její limitou.

Tvrzení 2.3 (podposloupnost má tutéž limitu)
Je-li $(b_n)_{n\geq 1}$ vybraná z posloupnosti reálných čísel $(a_n)_{n\geq 1}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, potom i $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Věta 2.4 (Bolzanova–Weierstrassova věta)
Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.

Věta 2.5 (konvergence $\Longleftrightarrow$ cauchyovskost)
Posloupnost $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ je konvergentní, právě když je cauchyovská.

2. Uveďte (a nedokazujte) vztahy mezi uspořádáním, resp. aritmetickými operacemi, a limitou posloupnosti (Věta, Tvrzení 2.6 až 2.9);

Tvrzení 2.6 (limity a uspořádání)
Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti reálných čísel s limitami $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

1. *Když $A > B$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_0 \Rightarrow a_n > b_n$.*
2. *Když existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$, pak $A \geq B$.*

Tvrzení 2.7 (věta o dvou policajtech)
Nechť reálné posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) splňují, že (i) $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$ a (ii) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom i (c_n) je konvergentní a $\lim c_n = L$.

Tvrzení 2.8 (limity a aritmetické operace)
Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti reálných čísel s limitami $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom

1. $\lim(a_n + b_n) = A + B$;
2. $\lim(a_n b_n) = AB$;
3. *pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.*

Tvrzení 2.9 (násobení limitní nulou)
Pokud je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ omezená a posloupnost $(b_n) \subset \mathbb{R}$ konverguje k nule, pak i posloupnost $(a_n b_n)$ konverguje k nule.

3. Uveďte (a nedokazujte) vlastnosti limsup a liminf posloupnosti (Věta 2.11 a její důsledek);

Věta 2.11 (limsup, liminf a hromadné body)
Nechť $A = (a_n) \subset \mathbb{R}$ je posloupnost a $H(A) \subset \mathbb{R}^*$ je množina jejích hromadnych bodů. Potom

$$\limsup a_n = \max(H(A)) \quad a \quad \liminf a_n = \min(H(A)).$$

Důsledek. *Pro každou posloupnost $A = (a_n) \subset \mathbb{R}$ platí, že*

$$\lim a_n = L \in \mathbb{R}^* \iff \limsup a_n = \liminf a_n = L.$$

4. Uveďte (a nedokazujte) kritéria konvergence řad (Věta, Tvrzení 2.14, 2.16 až 2.19);

Věta 2.14 (Leibnizovo kritérium)
Nechť posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňuje nerovnosti $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

konverguje.

Tvrzení 2.16 (srovnávací kritéria konvergence řad)
Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mějte nezáporné členy, tj. $a_n \geq 0$ a $b_n \geq 0$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$.

1. *Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

2. *Nechť $\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*$, patrně $K \geq 0$. Pak*

$$\begin{aligned} 0 < K < +\infty \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum a_n \text{ konverguje} \iff \sum b_n \text{ konverguje}\right) \\ K = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}\right) \\ K = +\infty \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum b_n \text{ konverguje}\right). \end{aligned}$$

Věta 2.17 (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nezáporné členy, tj.* $a_n \geq 0$ *pro všechny* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Předpokládejme, že existuje* $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, *a* n_0 *tak, že* $n > n_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < q$. *Pak řada konverguje.*
2. *Když* $\limsup a_n^{1/n} < 1$, *pak řada konverguje.*
3. *Když* $\lim a_n^{1/n} < 1$, *pak řada konverguje.*
4. *Když* $\limsup a_n^{1/n} > 1$, *pak řada diverguje.*
5. *Když* $\lim a_n^{1/n} > 1$, *pak řada diverguje.*

Věta 2.18 (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *kladné členy, tj.* $a_n > 0$ *pro všechny* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Předpokládejme, že existuje* $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, *a* n_0 *tak, že* $n > n_0 \Rightarrow a_{n+1}/a_n < q$. *Pak řada konverguje.*
2. *Když* $\limsup a_{n+1}/a_n < 1$, *pak řada konverguje.*
3. *Když* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, *pak řada konverguje.*
4. *Když* $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, *pak řada diverguje.*

Věta 2.19 (Cauchyovo kritérium)
Nechť posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *splňuje nerovnosti* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \quad \textit{konverguje.}$$

5. Diskutujte konvergenci a součet dvou nejdůležitějších řady, geometrické
řady a 1^s + 2^s + 3^s + ...;
???
6. Uveďte (a nedokazujte) kritéria neabsolutní konvergence řad (Věta 2.20);

Věta 2.20 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)
Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *jsou dvě posloupnosti, přičemž* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$.

1. *(Abelovo kritérium) Když řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*
2. *(Dirichletovo kritérium) Když* $\lim a_n = 0$ *a posloupnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je omezená, potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

7. Uveďte (a nedokazujte) věty o přerovnávání řad (Věty 2.22 a 2.23);

Věta 2.22 (přerovnání nemění součet abs. konvergentní řady)
Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je každé její přerovnání také absolutně konvergentní a má stejný součet

Věta 2.23 (Riemannova, o přerovnání neabsolutně konv. řady)
Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale ne absolutně, to jest $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Pak pro každé rozšířené reálné číslo $\gamma \in \mathbb{R}^*$ existuje její přerovnání, které má součet γ.

8. Uveďte (a nedokazujte) základní vlastnosti limit funkcí (Věta, Tvrzení 3.1 až 3.4);

Věta 3.1 (jednoznačnost limity funkce)
Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2 (Heineho definice limity funkce)
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$;
2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subset M$ takovou, že $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, platí, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Tvrzení 3.3 (aritmetika limit funkcí)
Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce f a g jsou definované na nějakém prstencovém okolí bodu a, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$, *je-li tento součet definován.*
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *je-li tento součin definován.*
3. *Nechť je navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a. Pak $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li tento podíl definován.*

Tvrzení 3.4 (limity funkcí a uspořádání)
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g a h jsou definované na nějakém prstencovém okolí bodu c.

1. *Mají-li funkce f a g v bodě c limitu a $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$, že $f(x) > g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$.*
2. *Existuje-li $\delta > 0$, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$, potom i $\lim_{x\to c} f(x) \geq \lim_{x\to c} g(x)$, když obě limity existují.*
3. *Existuje-li $\delta > 0$, že $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$ a $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom i $\lim_{x\to c} h(x) = A$.*

9. Uveďte (a nedokazujte) výsledky o limitě a skládání, resp. monotonii, funkcí (Věty 3.5 a 3.6);

Věta 3.5 (limita složené funkce)
Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce $f(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu A, funkce $g(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu c,

$$\lim_{x \to A} f(x) = B, \ \lim_{x \to c} g(x) = A$$

a je splněna jedna z podmínek P1 a P2:

P1. *Funkce $f(x)$ je spojitá v A.*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí $P(c, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu A, tj. $g(x) \neq A$ pro každé $x \in P(c, \eta)$.*

Potom

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = B.$$

Věta 3.6 (limita monotóní funkce)
Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f: \ (a, b) \to \mathbb{R}$ je na intervalu (a, b) monotóní. Potom existují (případně nevlastní) jednostranné limity

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \ \text{ a } \ \lim_{x \to b^-} f(x).$$

10. Uveďte (a nedokazujte) vlastnosti funkcí spojitých na intervalu (Věty 3.7 až 3.9);

Věta 3.7 (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)
Nechť $a < b$ jsou reálná čísla, funkce $f: \ [a, b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ spojitá a $f(a) \leq f(b)$. Pak každé reálné číslo z intervalu $[f(a), f(b)]$ je hodnotou funkce $f(x)$, to jest pro každé $y \in \mathbb{R}$, $f(a) \leq y \leq f(b)$, existuje $\alpha \in [a, b]$, že $f(\alpha) = y$.

Věta 3.8 (princip maxima pro spojité funkce)
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ a $f: \ [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima.

Věta 3.9 (spojitost inverzní funkce)
$J \subset \mathbb{R}$ buď interval, funkce $f: \ J \to \mathbb{R}$ buď spojitá a rostoucí (klesající). Potom inverzní funkce $f^{-1}: \ K \to J$, kde K je interval $f(J)$, je rovněž spojitá a rostoucí (klesající).

11. Uveďte (a nedokazujte) větu o zavedení exponenciály (Věty 3.10 a 3.12);

Věta 3.10 (zavedení exponenciály)

Existuje právě jedna funce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *která má dvě následující vlastnosti:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp(x) \geq 1 + x$.

Tuto funkci nazýváme exponenciální funkcí.

Věta 3.12 (exponenciála jako řada)

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ *platí rovnost*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

12. Uveďte (a nedokazujte) základní výsledky o derivacích a jejich počítání (Věta, Tvrzení 4.1 až 4.4);

Tvrzení 4.1 (vlastní derivace vynucuje spojitost)

Má-li $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ *v bodě* a *vlastní derivaci, je v* a *spojitá.*

Věta 4.2 (aritmetika derivací)

Nechť $f, g : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ *jsou funkce, které mají v bodě* a *derivaci (vlastní či nevlastní).*

1. *Platí, že* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *je-li pravá strana definovaná.*
2. *Platí* Leibnizova formule: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *je-li pravá strana definovaná a* f *nebo* g *je spojitá v* a.
3. *Je-li* g *spojitá v* a *a* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Věta 4.3 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f *má derivaci v bodě* y_0, *funkce* g *má derivaci v bodě* x_0, $y_0 = g(x_0)$ *a* g *je spojitá v* x_0. *Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0),$$

je-li výraz napravo definován.

Věta 4.4 (derivace inverzní funkce)
Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

1. *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce f^{-1} má v b derivaci*
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{-1}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

13. Uveďte (a nedokazujte) výsledky o souvislost monotonie funkce a jejích extrémů s derivací (Tvrzení 4.5, Věta 4.11);

Tvrzení 4.5 (nenulová derivace vylučuje lokální extrém)
Nechť má $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ v bodě a nenulovou derivaci $f'(a) \neq 0$. Potom f nenabývá v a lokální extrém, to jest pro každé δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, existují body $b, c \in P(a, \delta_1)$ takové, že $f(b) < f(a) < f(c)$.

Důkaz. Nechť např. $f'(a) > 0$. Existuje tedy $\delta_2 > 0$, že
$$x \in P(a, \delta_2) \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$
To znamená, že $x \in P^-(a, \delta_2) \Rightarrow f(x) < f(a)$ a také $x \in P^+(a, \delta_2) \Rightarrow f(x) > f(a)$. □

Důsledek. *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ a f má v a lokální extrém vzhledem k M. Potom $f'(a)$ neexistuje (nebo není definovaná, protože $U(a,\delta) \not\subset M$ pro každé $\delta > 0$) nebo $f'(a) = 0$.*

Věta 4.11 (derivace a monotonie)
Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval, funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci. Pokud na vnitřku J platí $f' > 0$ (resp. $f' \geq 0$), je f na J rostoucí (resp. neklesající). Pokud na vnitřku J platí $f' < 0$ (resp. $f' \leq 0$), je f na J klesající (resp. nerostoucí).

Důkaz. Probereme jen případ $f' > 0$, ostatní případy jsou velmi podobné. Pro každá dvě čísla $a < b$ z J podle Věty 4.7 existuje číslo c takové, že $a < c < b$ a
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0.$$
Z $b - a > 0$ proto plyne, že i $f(b) - f(a) > 0$ a f je na J rostoucí. □

Důsledek. *Je-li $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu J a má nulovou derivaci v každém vnitřním bodě J, je f na J konstantní.*

14. Uveďte (a nedokazujte) věty o střední hodnotě a jejich aplikace (Věta, Tvrzení 4.6 až 4.10);

Věta 4.6 (Rolleova věta)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$ spojitá, má na intervalu (a,b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 4.7 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$ spojitá a má na intervalu (a,b) derivaci (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 4.8 (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou na $[a,b]$ spojité a mají na intervalu (a,b) derivaci, přičemž $g'(x)$ je vždy vlastní a nenulová ($f'(x)$ může být i nevlastní). Potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 4.9 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce $f, g: P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.

1. *Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

2. *Pokud $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

Tvrzení 4.10 (jednostranná derivace jako limita derivace)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, funkce $f: [a, a+\delta) \to \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě a, má vlastní derivaci na $(a, a+\delta)$ a $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom má f v a derivaci zprava a

$$f'_+(a) = A.$$

15. Uveďte (a nedokazujte) výsledky o použití druhé derivace: konvexní (konkávní) funkce a inflexní body (Věta, Tvrzení 4.12 až 4.15);

Věta 4.12 (konvexita a konkavita zaručují jednostranné derivace)

Funkce $f: J \to \mathbb{R}$, která je na intervalu J konvexní nebo konkávní, má v každém vnitřním bodu intervalu J vlastní jednostranné derivace.

Věta 4.13 (konvexita, konkavita a druhá derivace)
Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, *funkce* $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ *má na* (a,b) *druhou derivaci* $f''(x)$ *a první derivace* $f'(x)$ *je na* (a,b) *spojitá. Pokud na* (a,b) *platí, že* $f'' > 0$ *(resp.* $f' \geq 0$*), je* f *na* (a,b) *ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud na* (a,b) *platí, že* $f' < 0$ *(resp.* $f' \leq 0$*), je* f *na* (a,b) *ryze konkávní (resp. konkávní).*

Tvrzení 4.14 (pro nenulovou druhou derivaci není inflexe)
Pokud $f''(a) \neq 0$, *nemá funkce* f *v bodě* a *inflexi.*

Věta 4.15 (postačující podmínka inflexe)
Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ *je funkce, která má na* (a,b) *spojitou derivaci* f', *a pro nějaký bod* $z \in (a,b)$ *má na intervalu* (a,z) *zápornou a na intervalu* (z,b) *kladnou druhou derivaci (nebo naopak). Potom je* z *inflexním bodem* f.

16. Uveďte (a nedokazujte) výsledky o Taylorově polynomu a jeho aplikacích (Věta, Tvrzení 4.17 a 4.18, rozvoje funkcí exp(x), sin(x), cos(x), log(1+x) a (1+x)^a do Taylorovy řady s oborem konvergence).

Věta 4.17 (charakterizace Taylorova polynomu)
Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. *Taylorův polynom* $T_n^{f,a}(x)$ *je jediný polynom* $P(x)$ *stupně nejvýše* n *s vlastností*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 4.18 (obecný tvar zbytku Taylorova polynomu)
Funkce f *a* φ *buďte definované na okolí* $U(a,\delta)$ *bodu* $a \in \mathbb{R}$, *přičemž* f *má na* $U(a,\delta)$ *vlastní* $(n+1)$*-tou derivaci* $f^{(n+1)}(x)$ *a* φ *má na* $U(a,\delta)$ *vlastní a nenulovou první derivaci* $\varphi'(x)$. *Potom pro každé* $x \in P(a,\delta)$ *existuje číslo* c *ležící mezi* a *a* x *takové, že*

$$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \cdot f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n.$$

Taylorův rozvoj exponenciály:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots.$$

Taylorův rozvoj sinu a cosinu:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}: \ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots .
\end{aligned}$$

Taylorův rozvoj logaritmu:

$$\forall x \in (-1, 1]: \ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Taylorův rozvoj mocniny: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$\forall x \in (-1, 1): \ (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

kde

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Pokud $\alpha = m \in \mathbb{N}$, dostáváme konečný rozvoj

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n,$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.