Větník k MAI III.

Jakub Melka

14. října 2007

Obsah

1 Metrické prostory **2**
1.1 Základy 2
1.2 Konvergence a spojitost 3

1 Metrické prostory

1.1 Základy

Metrický prostor je dvojice (M, ρ), kde M je množina a ρ je funkce definovaná předpisem

$$\rho : M \times M \to \mathbb{R} \setminus \{r \in \mathbb{R} : r < 0\} \tag{1}$$

A navíc ρ musí splňovat následující axiomy :

1. $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
2. $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
3. $\forall x, y, z \in M : \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Definice 1.1 *Otevřená koule se středem v bodě $a \in M$ v množině M o poloměru r je definována takto*

$$B(a, r) = \{x \in M : \rho(x, a) < r\} \tag{2}$$

Otevřená koule tedy

Definice 1.2 *Uzavřená koule se středem v bodě $a \in M$ v množině M o poloměru r je definována takto*

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in M : \rho(x, a) < r\} \tag{3}$$

Věta 1.1 *Nechť je dán metrický prostor (M, ρ), L_i jsou nějaké otevřené množiny, K_i jsou nějaké uzavřené množiny, pak*

1. *$\varnothing$ a M jsou otevřené a uzavřené množiny zároveň,*
2. *$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i$ a $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i, n \in \mathbb{N}$ jsou otevřené množiny*
3. *$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i$ a $\bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i, n \in \mathbb{N}$ jsou uzavřené množiny*

Definice 1.3 *Vztahy mezi body a množinami. Nechť je definována metrika (M, d), množina X, bod $a \in M$ a jeho okolí U. Pak říkáme, že*

1. a je *vnitřní* bod množiny X, pokud $\exists U : U \subset X$ - to znamená, že kromě bodu a jsou „blíže hranici X“ ještě nějaké další body a tedy a není na hranici X.
2. a je *vnější* bod množiny X, pokud $\exists U : U \subset M \setminus X$. Tedy bod a má na cestě k množině X ještě nějaké další body.

3. a je *hraniční* bod množiny X, pokud $\forall U : U \cap M \setminus X \neq \varnothing$ a $U \cap X \neq \varnothing$.

4. a je *limitní* bod množiny X, pokud $\forall U : |U \cap X| = \infty$. Například pro reálná a komplexní libovolněrozměrná čísla platí, že každý jejich vnitřní a hraniční bod je i limitní.

5. a je *izolovaný* bod množiny X, pokud $\exists U : U \cap X = \{a\}$.

1.2 Konvergence a spojitost

Definice 1.4 *Posloupnost a_n v metrickém prostoru (M, d) konverguje, existuje-li bod $a \in M$ takový, že*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0 \tag{4}$$

Pak je bod a limitou posloupnosti a_n.

Definice 1.5 *Posloupnost a_n je v metrickém prostoru (M, d) cauchyovská, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : m, n \in \mathbb{N} : m > n > n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon \tag{5}$$

Věta 1.2 *Podmnožina $X \subset M$ je uzavřená $\Leftrightarrow$ $\forall$ konvergentní posloupnost $(a_n) \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in X$.*

Příklad posloupnosti, která není uzavřená - interval $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ - zde je příklad posloupnosti, která sice konverguje, ale její limita není v tomto intervalu, posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$. Naopak interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený, a každá konvergentní posloupnost má limitu v tomto intervalu.

Definice 1.6 *Uzávěrem množiny X v metrice (M, d) rozumíme množinu $\bar{X}$, pro kterou platí*

$$\bar{X} = \{a \in M : a \text{ je limitou nějaké posloupnosti v } X \tag{6}$$

nebo ekvivaletně

$$\bar{X} = X \cup \{a : a \text{ je limitním bodem množiny } X\} \tag{7}$$

Definice 1.7 *Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory. Nechť $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ jsou dva metrické prostory a zobrazení $f : M_1 \to M_2$. Zobrazení f je v bodě $a \in M_1$ spojité, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in M_1 : d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \tag{8}$$

Věta 1.3 *Nechť $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ jsou dva metrické prostory. Zobrazení $f : M_1 \to M_2$ je spojité, $\Leftrightarrow \forall f(X) \subseteq M_2$ je otevřená množina, pak i $X \subseteq M_1$ je otevřená množina. Analogicky platí pro uzavřené množiny.*

Pokud vzorem uzavřené množiny je otevřená množina nebo vzorem otevřené množiny je uzavřená množina, pak logicky zobrazení není spojité, protože „budou problémy“ s krajními body intervalů, někde se musí uplatnit a tam to není spojité.

Definice 1.8 *Nechť* $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ *jsou dva metrické prostory. Pokud* $f : M_1 \to M_2$ *je spojité a* f *je bijekce, pak se jedná o homeomorfismus.*

Homeomorfismus je slabší než *izometrie*, protože u *izometrie* se zachovávají ještě navíc vzdálenosti.

Definice 1.9 *Nechť* (M, d) *je metrický prostor. Nazývá se kompaktní, pokud každá posloupnost* $(a_n) \subset M$ *má konvergentní podposloupnost.*

Poznámka. Samotná posloupnost ve většině případů nekonverguje, to až její podposloupnosti.

Věta 1.4 *Kompaktnost se zachovává následujícími operacemi :*

1. Přechodem k uzavřenému podprostoru,
2. Spojitým zobrazením,
3. Kartézským součinem.

Věta 1.5 *Kompaktní množiny jsou uzavřené a omezené.*

Věta 1.6 *Kompaktní podmnožiny euklidovského prostoru* $\mathbb{R}^n$ *jsou právě a jen uzavřené a omezené množiny.*