Matematická analýza I – Martin Klazar
(Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné)

0. Úvod a opakování (značení, operace s množinami apod.)

1. Reálná čísla a jejich vlastnosti

- **Uspořádané těleso**
  - Komutativní těleso - axiomy A1-A9
  - Lineární uspořádání - axiomy A10-A11
  - Uspořádané těleso – axiomy A1-A13
- **Isomorfismus**
- **Maximum, minimum, supremum, infimum**
  - Maximální (minimální)prvek množiny
  - Horní (dolní) mez množiny
  - Množina shora omezená, zdola omezená, omezená
  - Supremum, infimum
- **Zavedení reálných čísel**
  - Axiom suprema A14
  - Věta 1.1 (Charakterizace reálných čísel)
    - Těleso reálných čísel R – axiomy A1-A14
  - Věta 1.2 (Cantorova věta o vnořených intervalech)
  - Věta 1.3 (Cantorova věta o nespočetnosti R)
    - Důkaz 1) pomocí Věty 1.2
    - Důkaz 2) pomocí Cantorovy diagonální metody

2. Posloupnosti a řady reálných čísel

- **Posloupnost (reálných čísel)**
  - posloupnost – zobrazení f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$
  - Určení: explicitním vzorcem, rekurentní formulí
    - Příklady – Fibonacciho posloupnost
  - Posloupnost shoda omezená, zdola omezená, omezená
  - Posloupnost rostoucí, klesající, nerostoucí (slabě klesající), neklesající (slabě rostoucí), konstantní
  - Posloupnost cachyovská
- **Limita posloupnosti**
  - Definice limity
  - Posloupnost konvergentní, divergentní
  - Trojúhelníková nerovnost
- **Obecné výsledky o konvergeci posloupností**
  - Věta 2.1 (jednoznačnost limity)
    - Každá posloupnost reálných čísel má nejvýše jednu limitu.
  - Věta 2.2 (monotonie a omezenost $\Rightarrow$ konvergence)
  - Podposloupnost (vybraná posloupnost)
  - Tvrzení 2.3 (podposloupnost má tutéž limitu jako původní posloupnost)
  - Věta 2.4 (Bolzano-Weirstrassova věta)
    - Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.
  - Věta 2.5 (konvergence $\Leftrightarrow$ cauchyovskost)
    - Posloupnost reálných čísel je konvergentní, právě když je cauchyovská.
- **Aritmetika limit**
  - Tvrzení 2.6 (limity a uspořádání)
  - Poznámka: Ostrá nerovnost mezi cčeny posloupností může v limite přejít v rovnost.
  - Tvrzení 2.7 (věta o dvou policajtech, věta o sevření)
  - Tvrzení 2.8 (limity a aritmetické operace)
  - Poznámka: (lineární kombinace dvou posloupností)
    - Když $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $a_n \to A$, $b_n \to B$ pro $n \to \infty$, potom $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha A + \beta B$ pro $n \to \infty$.
  - Tvrzení 2.9 (násobení limitní nulou)

        - Pokud je posloupnost (a_n) je omezená a posloupnost (b_n) konverguje k nule, pak i posloupnost $(a_n b_n)$ konverguje k nule.
    - Poznámka: Nula má jako limita vyjímečné postavení.
        - Pokud totiž (a_n) diverguje a (b_n) konverguje, ale ne k nule, pak $(a_n b_n)$ diverguje.
- **Nevlastní limity**
    - Nevlastní limity: $+\infty$ a $-\infty$
    - Vlastní limita: $\lim a_n \in \mathbf{R}$
    - Konvergentní posloupnost – vlastní limita
    - Divergentní posloupnost – nevlastní limita, nebo žádná limita
    - Rozšírená reálná osa **R***
    - Neurčité výrazy
    - Tvrzení 2.10 (dělení limitní nulou)
    - Věta 2.2* (monotonie $\Rightarrow$ existence limity)
        - Každá neklesající posloupnost má limitu:
            - shora omezená – vlastní
            - shora neomezená – $+\infty$
    - Tvrzení 2.3*: podposloupnost má tutéž limitu (vlastní ci nevlastní), jako původní posloupnost
    - Věta 2.4* (Bolzano-Weirstrassova věta pro všechny posloupnosti)
        - Každá reálná posloupnost (a_n) má podposloupnost, která má limitu (vlastní nebo nevlastní).
    - Věta 2.5* (ekvivalence konvergence a cauchyovskosti) v případě nevlastních limit neplatí
        - Žádná posloupnost s nevlastní limitou není cauchyovská.
    - Tvrzení 2.6* (limity a uspořádání) – platí pro nevlastní limity beze změny.
    - Tvrzení 2.7* (věta o dvou policajtech) – platí pro nevlastní limity beze změny.
    - Tvrzení 2.8* (nevlastní limity a aritmetické operace)
- **Limes superior a limes inferior**
    - Hromadný bod – limita nějaké podposloupnosti vybrané z posloupnosti (a_n)
    - Limes superior a limes inferior
    - Poznámka o hromadných bodech.
    - Věta 2.11 (limsup, liminf a hromadné body)
- **Dvě standardní limity**
    - $\lim n^\alpha$ $(n \to \infty)$, $\lim q^n$ $(n \to \infty)$
- **Řady reálných čísel**
    - Nekonečná řada (reálných čísel) – definice
    - Částecný součet řady
    - Konvergentní řada – $\exists$ limita vlastní s_n posloupnosti částečných součtů (s_n)
        - Součet konvergentní řady – limita s_n
    - Divergentní řada – limita s_n neexistuje nebo je nevlastní
- **Dvě důležité řady**
    - Geometrická řada
        - q – kvocient
    - Harmonická řada
- **Obecné výsledky o konvergenci řad**
    - Věta 2.12 (podmínky konvergence řady)
        - Pokud řada (a_n)konverguje, potom $\lim a_n = 0$.
        - Řada (a_n) konverguje, právě když splňuje Cauchyovu podmínku pro rady.
    - Absolutní konvergence
        - Řada absolutních hodnot $|a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ řada a_n konverguje absolutně
    - Tvrzení 2.13 (absolutní konvergence $\Rightarrow$ konvergence)
        - Pokud řada konverguje absolutně, potom konverguje.
        - Poznámka: Opačná implikace samozřejmě neplatí.
    - Věta 2.14 (Leibnizovo kritérium)
        - pro alternující řady
    - Tvrzení 2.15 (lineární kombinace řad)
- **Kritéria konvergence řad s nezápornými členy**

- Tvrzení 2.16 (srovnávací kritéria konvergence řad)
    - body 1-2
- Věta 2.17 (Cauchyovo odmocninové kritérium)
    - body 1-5
- Věta 2.18 (d'Alambertovo podílové kritérium)
    - body 1-4
- Věta 2.19 (Cauchyovo kondenzační kritérium)

- **Kritéria neabsolutní konvergence a prerovnávání rad**
    - Věta 2.20 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)
        - Abelovo kritérium
        - Dirichletovo kritérium
    - Lemma 2.21 (Abelova parciální sumace)
    - Skládací řady (Telescoping series)
    - Přerovnání řady
    - Věta 2.22 (přerovnání nemění součet absolutně konvergentní řady)
        - Řada je absolutně konvergentní ⇒ každé její přerovnání je také absolutně konvergentní a má stejný součet.
    - Věta 2.23 (Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady)

3. Limity a spojitost funkcí jedné reálné promenné

- **Funkce**
    - Posloupnost – zobrazení f: **N** → **R**
    - Funkce – zobrazení f: M → **R**, M ⊂ **R**, M je typicky omezený interval nebo celé **R**
    - Vlastnosti funkce
        - Monotonie – rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající
        - Omezenost – shora omezená, zdola omezená, omezená
        - Symetričnost – sudá, lichá
        - Periodičnost – periodická
- **Limita funkce v bodě, spojitost v bodě**
    - Okolí bodu
        - δ-okolí
        - ε-okolí
        - Pravé okolí, levé okolí
        - Prstencové okolí
    - Limita funkce v bodě – definice
        - Limita posloupnosti jako speciální případ
    - Jednostranné limity
        - Limita zprava, limita zleva
    - Spojitá funkce – definice
        - Funkce spojitá zprava, spojitá zleva
- **Základní věty o limitách funkcí**
    - Věta 3.1 (jednoznačnost limity funkce)
        - Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.
    - Věta 3.2 (Heineho definice limity funkce)
        - pomocí limity posloupnosti
        - důsledek – charaktizace spojitosti funkce
    - Poznámka: ∃ vlastní limity funkce v bodě ⇒ ∃ prstencové okolí, na nemž je funkce omezená.
    - Tvrzení 3.3 (aritmetika limit funkcí)
    - Tvrzení 3.4 (limity funkcí a uspořádání)
    - Polynom lze vytvořit z konstantních funkcí a z identické funkce opakovaným sčítáním a násobením
    - Racionálních funkce – podíly polynomů
    - Věta 3.5 (limita složené funkce)
    - Věta 3.6 (limita monotónní funkce)
- **Funkce spojité na intervalu**
    - Interval – definice

        - konvexní podmnožina **R**
    - Vnitřní bod intervalu, krajní bod intervalu
    - Funkce spojitá na intervalu – definice
    - Věta 3.7 (Darbouxova věta o nabývání mezihodnot)
        - Důsledek: Spojitá funkce zobrazuje interval na interval.
    - Minima a maxima funkce na intervalu
        - Minimum, maximum
        - Ostré minimum, ostré maximum
        - Lokální minimum, lokální maximum
        - Ostré lokální minimum, ostré lokální maximum
    - Věta 3.8 (princip maxima pro spojité funkce)
        - Funkce je spojitá na uzavřeném intervalu ⇒ funkce nabývá na tomto intervalu svého maxima i minima.
        - Důsledek: Funkce je spojitá na uzavřeném intervalu ⇒ funkce je na intervalu tomto omezená.
        - Poznámky:
            - Funkce není spojitá na uzavřeném intervalu nebo funkce je spojitá na otevřeném intervalu ⇒ funkce na tomto intervalu nemusí nabývat svého maxima ani minima, ani nemusí být omezená.
            - Interval uzavřený (kompaktní) – Intervaly [a, b] (a, b jsou reálná čísla), pro než platí princip maxima spojité funkce, jsou omezené a uzavřené neboli tzv. kompaktní intervaly.
    - Inverzní funkce
        - Funkce prostá – existuje k ní inverzní funkce
        - Zobrazení f a f^{-1} jsou pak bijekce mezi množinami X a Z.
    - Věta 3.9 (spojitost inverzní funkce)
        - Funkce f: J → **R** je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu J
          ⇒ inverzní funkce f^{-1} : f(J) → J, je rovněž spojitá a rostoucí (klesající).
    - Lemma: Funkce je na intervalu J rostoucí (klesající) a f(J) je interval ⇒ funkce je spojitá na J.
    - Poznámky:
        - shrnutí operací, které zachovávají spojitost
            - f, g jsou spojité v bodě a ⇒ f + g a f.g jsou spojité v bodě a
            - f, g jsou spojité v bodě a, g(a) != 0 ⇒ f / g je spojitá v bodě a
            - g je spojitá v bodě a, f je spojitá v bodě g(a) ⇒ složená funkce f(g) spojitá v bodě a
            - f je rostoucí (klesající) a spojitá na intervalu J ⇒ inverzní funkce f^{-1} : f(J) → R je spojitá na intervalu f(J)
        - funkce prostá a spojitá na intervalu J ⇔ funkce je rostoucí (klesající)
- **Exponenciála a logaritmus**
    - Věta 3.10 (zavedení exponenciály)
    - vlastnosti exponenciály
    - Bernoulliova nerovnost
    - Eulerovo číslo e = exp(1)
    - Logaritmická funkce – inverzní k exponenciále
    - vlastnosti logaritmické funkce
    - Obecná mocnina a^b = log(b exp(a))
    - Tvrzení 3.11 (růst exponenciály a logaritmu)
    - Věta 3.12 (exponenciála jako řada)
    - Cauchův součin řad
    - Tvrzení: Jsou-li obě rady absolutně konvergentní a mají-li soucty A ∈ **R** a B ∈ **R**, pak je absolutně konvergentní i jejich Cauchův součin a má součet C = AB.
    - Identity exponenciály
    - Věta 3.13 (iracionalita Eulerova čísla e)
        - Eulerovo číslo e = 2.71828... je iracionální, e ∉ **Q**

4. Derivace funkcí jedné reálné promenné

- Derivace funkce f(x) v bodě a je její okamžitá míra růstu v bodě a.

- **Základní vlastnosti derivací**
  - Derivace funkce v bodě a
  - Derivace zprava, derivace zleva
  - Poznámky:
    - Derivace bud existuje vlastní, nebo nevlastní, nebo neexistuje
    - Existuje derivace funkce v bodě a $\Leftrightarrow$ derivace zprava = derivace zleva v bodě a
    - Geometrický výklad derivace
  - Příklady:
    - derivace funkcí: identita, mocninné funkce, exponenciála, signum, absolutní hodnota
  - Tvrzení 4.1 (vlastní derivace $\Rightarrow$ spojitost)
    - Poznámky:
      - Má-li funkce v bodě a vlastní derivaci, mužeme funkci v okolí a aproximovat pomocí lineární funkce.
    - Příklad: funkce f(x) = |x| je spojitá v bodě nula, ale vůbec v něm nemá derivaci.
    - Příklad: funkce f(x) = sgn(x) má v bodě nula nevlastní derivaci, ale není v tomto bode spojitá. Nevlastní derivace tedy nevynucuje obecně spojitost.
  - Věta 4.2 (aritmetika derivací)
    - součet
    - součin - Leibnizova formule
    - podíl
  - Věta 4.3 (derivace složené funkce)
    - Poznámka: Pro nevlastní derivace věta bez předpokladu spojitosti funkce g nemusí platit.
  - Věta 4.4 (derivace inverzní funkce)
    - $f'(a)\neq 0 \Rightarrow (f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$
    - $f'(a)=0$ a f je rostoucí (klesající) $\Rightarrow (f^{-1})'(b)=+\infty$ (resp. $-\infty$)
    - Poznámka: Z praktického hlediska máme formuli $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- **Goniometrické a cyklometrické funkce**
  - Goniometrické funkce
    - Věta (charakterizace sinu)
    - Vlastnosti funkce sin(x)
    - Definice cos(x), tan(x), cot(x)
  - Cyklometrické funkce – inverzní ke goniometrickým funkcím
    - arcsin(x), arccos(x), arctan(x), arccot(x)
- **Přehled derivací elementárních funkcí**
  - derivace exponenciály, logaritmické funkce
  - derivace konstantní funkce
  - derivace obecné mocniny
  - derivace polynomu
  - derivace goniometrických funkcí
  - derivace cyklometrických funkcí
- **Derivace a extrémy, věty o střední hodnotě**
  - Tvrzení 4.5 (nenulová derivace vylucuje lokální extrém)
  - Věta 4.6 (Rolleova veta)
  - Věta 4.7 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)
  - Věta 4.8 (Cauchyova věta o střední hodnotě)
  - Několik použití vět o střední hodnotě:
  - Věta 4.9 (l'Hospitalovo pravidlo)
  - Tvrzení 4.10 (jednostranná derivace jako limita derivace)
  - Věta 4.11 (derivace a monotonie)
    - Důsledek: funkce je spojitá na intervalu a má všude nulovou derivaci $\Rightarrow$ je to konstantní funkce
    - Poznámka: Pro jiné definiční obory než jsou intervaly věta i její důsledek obecně neplatí.
    - Degenerovaný interval

    - Druhá derivace, derivace vyšších řádů - definice
- **Konvexní a konkávní funkce**
    - Funkce konvexní, konkávní na intervalu
    - Funkce ryze konvexní, ryze konkávní na intervalu
    - Věta 4.12 (konvexita a konkavita zaručují jednostranné derivace)
        - Funkce konvexní nebo konkávní na intervalu, má v každém vnitřním bodu intervalu vlastní jednostranné derivace.
        - Důsledek: Funkce na otevřeném intervalu konvexní nebo konkávní ⇒ je na otevřeném spojitá.
    - Věta 4.13 (konvexita, konkavita a druhá derivace)
    - Inflexní bod (inflexe)
    - Tvrzení 4.14 (pro nenulovou druhou derivaci není inflexe)
        - Druhá derivace funkce v bodě a není nulová ⇒ funkce nemá v bodě a inflexi.
    - Věta 4.15 (postačující podmínka inflexe)
    - Asymptota
    - Tvrzení 4.16 (o asymptotě)
- **Vyšetření průběhu funkce**
    - Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
    - Zjistíme průsečíky se souřadnicovými osami.
    - Zjistíme symetrii funkce: sudost, lichost, periodicitu.
    - Vypočítáme limity v krajních bodech definičního oboru.
    - Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
    - Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce konvexní ci konkávní. Určíme inflexe.
    - Nalezneme asymptoty funkce.
    - Načrtneme graf funkce.
- **Taylorův polynom**
    - Aproximace funkce – lepší než pomocí lineární funkce
    - Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a – definice
    - Lemma (o identicky nulovém polynomu)
    - Věta 4.17 (charakterizace Taylorova polynomu)
    - Zbytek Taylorova polynomu - rozdíl mezi hodnotou funkce a hodnotou Taylorova polynomu
    - Věta 4.18 (obecný tvar zbytku Taylorova polynomu)
        - Důsledky:
            - Lagrangeův tvar zbytku
            - Cauchyův tvar zbytku
    - Taylorova řada se středem v bodě a – rozvoj funkcí
        - Příklady:
            - Taylorův rozvoj exponenciály
            - Taylorův rozvoj sinu a cosinu
            - Taylorův rozvoj logaritmu
            - Taylorův rozvoj mocniny
- **Asymptotické symboly o a O**
    - asymptotické srovnání funkcí
    - Peanův tvar zbytku Taylorova polynomu
    - Příklad: Taylorův rozvoj arcustangenty se zbytkem v Peanove tvaru
    - Lemma
- **Ještě tři poznámky o Taylorových řadách**
    - Příklady...
    - Střídavé permutace
    - Množinové rozklady – jejich počty Bellova čísla
    - Uspořádané množinové rozklady

5. Primitivní funkce (tj. antiderivování)

- **Primitivní funkce**
    - Primitivní funkce F k funkci f na intevalu - definice
    - Tvrzení 5.1 (Primitivní funkce je jednoznačná až na konstantu)

        - Poznámky
    - Množina primitivních funkcí – symbol integrálu – Newtonův integrál
    - Věta 5.2 (spojitá funkce má primitivní funkci)
        - Každá spojitá funkce na neprázdném otevřeném intervalu má primitivní funkci.
        - Poznámka: Protože derivování zachovává lineární kombinace, zachovává je i operace primitivní funkce: F je primitivní k f, G je primitivní ke g a čísla a,b $\in$ **R** $\Rightarrow$ $\alpha F + \beta G$ je primitivní k $\alpha f + \beta g$ na intervalu
- **Tabulka primitivních funkcí**
    - Věta 5.3 (funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost)
        - Funkce má ma intervalu I primitivní funkci $\Rightarrow$ f(I) je interval (funkce má Darbouxovu vlastnost)
        - Třída primitivních funkcí je širší než třída spojitých funkcí
        - Darbouxova vlastnost (nabývání všech mezihodnot) funkce f je tedy nutnou podmínkou pro to, aby f mela primitivní funkci.
- **Pocítání primitivních funkcí**
    - Věta 5.4 (věta o substituci)
        - Důsledek
    - Věta 5.5 (intergrace per partes)
    - Intergrace racionálních funkcí
        - pro nalezení primitivní funkce je třeba nelézt kořeny racionální funkce
        - Věta 5.6 (obecný tvar funkce primitivní k racionální funkci)
        - Zopakování některých vlastností polynomů:
            - Věta (základní věta algebry)
            - Důsledek: každý polynom lze rozložit na součin kořenových činitelů
            - Důsledek: stejné kořenové činitele lze seskupit
            - Důsledek: každý polynom P, který není identicky nulový, má nejvýše deg(P) nulových bodů
                - identicky nulový polynom má všude samé nulové body
            - Důsledek: polynomy se stejnými koeficienty jsou stejné (?)
            - Tvrzení: Je-li α kořenem polynomu P(x) s násobností $k \geq 1$, potom je α kořenem P'(x) s násobností k–1.
            - Důsledek: Násobnost α v P(x) je minimální k takové, že $P^{(k)}(x)$ není nula.
            - Polynomy s reálnými koeficienty
            - Tvrzení: Je-li $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ kořenem reálného polynomu P(x) s násobností k, pak i $\overline{\alpha} = a - bi$ je kořenem P(x) s násobnosí k.
            - Důsledek:
            - Tvrzení 5.7 (rozklad racionální funkce na parciální zlomky)
        - Postup:
            - dělení se zbytkem
            - rozklad na parciální zlomky
            - integrace parciálních zlomků