Teorie množin (NAIL063) – definice a věty

sepsal Vojtěch Horký

26. června 2008

Axiom 1 (Existence)
Existuje alespoň 1 množina.

Axiom 2 (Existensionality)

$$(\forall x)(\forall y)((\forall t)(t \in x \iff t \in y)) \Rightarrow x = y$$

Definice 1 (Podmnožina, inkluze)
Říkáme, že množina x je podmnožinou množiny y, zapisujeme $x \subseteq y$, jestliže platí:

$$(\forall t)(t \in x \Rightarrow t \in y).$$

Říkáme, že množina x je vlastní podmnožinou množiny y, zapisujeme $x \subset y$, jestliže platí:

$$(x \subseteq y) \;\&\; (x \neq y).$$

Lemma 1

1. $x \subseteq x$, $\neg(x \subset x)$
2. $(x \subseteq y \;\&\; y \subseteq z) \Rightarrow (x \subseteq z)$
3. $(x \subset y \;\&\; y \subseteq z) \Rightarrow (x \subset z)$
4. $(x \subseteq y \;\&\; y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$
5. $(x \subseteq y \;\&\; y \subseteq x) \Rightarrow x = y$

Axiom 3 (Schema axiomů vydělení)
Je-li $\varphi(x)$ formule neobsahující volně proměnnou z, pak formule

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\Big(x \in z \iff (x \in a \;\&\; \varphi(x))\Big)$$

je axiom teorie množin – axiom vydělení pro formuli φ[1].

[1] Množina z je axiomem vydělení určena jednoznačně

Definice 2 (Průnik a rozdíl množin)
Pro množiny a, b průnikem rozumíme množinu $\{x \in a : x \in b\} = \{x : x \in a \ \&\ x \in b\} = a \cap b$ (tj. podle axiomu vydělení $\varphi(x) = x \in b$).

Rozdílem pak nazýváme množinu $a \setminus b = \{x : x \in a \ \&\ x \notin b\}$ ($\varphi(x) = x \notin b$).

Definice 3 (Prázdná množina)
$\emptyset$ je jediná množina splňující $(\forall x)(x \notin \emptyset)$. Nazýváme ji prázdná množina.

Definice 4 (Disjunktní množiny)
Řekneme, že množiny a, b jsou disjunktní, pokud $a \cap b = \emptyset$.

Lemma 2

1. $\neg(\exists y)(y \in \emptyset)$
2. $(\forall x)(\emptyset \subseteq x)$
3. $x \subseteq \emptyset \iff x = \emptyset$

Lemma 3

$$(\forall a) a = \{x : x \in a \ \&\ x = x\}$$

Věta 4

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \in z)$$

Axiom 4 (Dvojice)

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \iff (x = a \ \lor \ x = b))$$

Definice 5 (Neuspořádaná dvojice množin)
Jsou-li a, b množiny, pak množinu sestavenou z prvků a, b nazveme neuspořádanou dvojicí množin a, b, značíme $\{a, b\}$.

Místo $\{a, a\}$ píšeme $\{a\}$.

Lemma 5

1. $\{x\} = \{y\} \iff x = y$
2. $\{x\} = \{x, y\} \iff x = y$

3. $\{x, y\} = \{u, v\} \iff \Big(((x = u) \;\&\; (y = v)) \;\vee\; ((x = v) \;\&\; (y = u))\Big)$

Definice 6 (Uspořádaná dvojice množin)
Uspořádaná dvojice množin a, b je množina $\{a, \{a, b\}\}$. Značíme $\langle a, b\rangle$.

Lemma 6

$$\langle a, b\rangle = \langle u, v\rangle \iff (a = u \;\&\; b = v)$$

Definice 7 (Uspořádané *k*-tice)
Nechť k je přirozené kladné číslo a jsou definovány množiny $a_1, a_2, \cdots, a_k$. Pak uspořádanou k-tici definujeme jako: $\langle a_1\rangle = a_1$ a indukčně $\langle a_1, a_2, \cdots, a_k\rangle = \langle\langle a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\rangle, a_k\rangle$.

Lemma 7

$$\langle a_1, \cdots, a_k\rangle = \langle b_1, \cdots, b_k\rangle \iff (a_1 = b_1 \;\&\; \cdots \;\&\; a_k = b_k)$$

Axiom 5 (Sumy)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\Big(x \in z \iff (\exists t)(x \in t \;\&\; t \in a)\Big)$$

$$\bigcup a = \{x : (\exists t)(x \in t \;\&\; t \in a)\}$$

Lemma 8
Buď $a = \{b, c\}$. Pak $\bigcup a = \{x : x \in b \;\vee\; x \in c\}$[2]

Definice 8 (Průnik množin)
Pro neprázdnou množinu a označme

$$\bigcap a = \{x : (\forall b)(b \in a \Rightarrow x \in b)\}$$

Axiom 6 (Schema axiomů nahrazení)
Je-li $\psi(u, v)$ formule jazyka teorie množin neobsahující volně proměnné x a z, pak formule

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)\Big((\psi(u, v) \;\&\; \psi(u, w)) \Rightarrow v = w\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall a)(\exists z)(\forall x)\Big(x \in z \iff (\exists t)(t \in a \;\&\; \psi(t, x))\Big)$$

je axiom teorie množin, který nazýváme axiomeme nahrazení pro formuli ψ.

[2] V tomto případě značíme $\bigcup a = b \cup c$

Definice 9 (Kartézský součin)
Buďte a a b množiny. Kartézský součin $a \times b$ množin a, b je množina

$$a \times b = \{\langle u, v\rangle : u \in a \;\&\; v \in b\}$$

Definice 10 (Relace, funkce, definiční obor a obor hodnot)
Binární relace je množina R, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice.

Definiční obor relace R: $\mathrm{dom}(R) = \{x : (\exists y)\langle x, y\rangle \in R\}$

Obor hodnot relace R: $\mathrm{rug}(R) = \{y : (\exists x)\langle x, y\rangle \in R\}$

Inverzní relace k R: $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in R\}$

Složení relací R a S: $S \circ R = \{\langle x, z\rangle : (\exists y)\langle x, y\rangle \in R \;\&\; \langle y, z\rangle \in S\}$

Množina f se nazývá funkce, je-li f relace, pro kterou platí:

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(f))((y \in \mathrm{rug}(f) \;\&\; y' \in \mathrm{rug}(f) \;\&\; \langle x, y\rangle \in f \;\&\; \langle x, y'\rangle \in f) \Rightarrow y = y')$$

Definice 11 (Funkce prosté, surjektivní a bijektivní)
Funkce $f : A \to B$ se nazývá prostá, je-li f^{-1} funkce.

Funkce $f : A \to B$ se nazývá surjektivní, je-li $B = \mathrm{rug}(f)$.

Funkce $f : A \to B$ se nazývá bijekce, je-li současně prostá a surjektivní.

Definice 12 (Uspořádané množiny)
Ostře uspořádaná množina je dvojice $\langle a, r\rangle$, kde a je množina, r je relace, $r \subseteq a \times a$ a r splňuje pro všechna $x, y, z \in a$:

- r je tranzitivní: $(\langle x, y\rangle \in r \;\&\; \langle y, z\rangle \in r) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in r$
- r je antireflexivní: $(\forall x \in a)\neg\langle x, x\rangle \in r$

Ostré uspořádání nazýváme lineární, jestliže

$$(\forall x, y \in a)\langle x, y\rangle \in R \;\vee\; \langle y, x\rangle \in R \;\vee\; x = y$$

$\langle a, r\rangle$ je uspořádaná množina, $x, y \in a$ x, y jsou r-neporovnatelné pokud

$$\langle x, y\rangle \notin R \;\&\; \langle y, x\rangle \notin R \;\&\; x \neq y$$

Definice 13 (Isomorfismus)
Jsou-li R a S relace, $R \subseteq a \times a$, $S \subseteq b \times b$, řekneme, že dvojice $\langle a, R\rangle$ je isomorfní s $\langle b, S\rangle$ pokud existuje bijekce $f : a \to b$ taková, že

$$(\forall x, y \in a)\langle x, y\rangle \in R \iff \langle f(x), f(y)\rangle \in S$$

Zobrazení f se nazývá isomorfismus.

Definice 14 (Nejmenší prvek množiny)
Je-li r uspořádání na množině a, $m \subseteq a$, řekneme, že $x \in$ je nejmenší prvek množiny m, pokud

$$x \in m \mathbin{\&} (\forall y)(y \in m \Rightarrow (x = y \ \vee \ xry))$$

Řekneme, že uspořádání r na množině a je dobré ($\langle a, r\rangle$ je dobře uspořádaná množina) pokud každá neprázdná $m \subseteq a$ má r-nejmenší prvek.

Je-li $\langle a, r\rangle$ uspořádaná množina, $x \in a$ budeme značit $(\leftarrow, x)$ množinu $\{y : y \in a \mathbin{\&} yrx\}$ (počáteční úsek určený x).

Lemma 9
Je-li $\langle a, r\rangle$ dobře uspořádaná množina, $x \in a$, pak $\langle a, r\rangle$ není isomorfní s $\langle(\leftarrow, x), r\rangle$.

Lemma 10
Jsou-li $\langle a, r\rangle$ a $\langle b, s\rangle$ isomorfní dobře uspořádané množiny, pak mezi nimi existuje jediný isomorfismus.

Věta 11
Buďte $\langle a, r\rangle$ a $\langle b, s\rangle$ dvě dobře uspořádané množiny. Pak nastává právě jedna z následujících možností.

1. $\langle a, r\rangle$ isomorfní s $\langle b, s\rangle$
2. existuje $x \in a$, že $\langle(\leftarrow, x), r\rangle$ je isomorfní s $\langle b, s\rangle$
3. existuje $y \in b$, že $\langle a, r\rangle$ je isomorfní s $\langle(\leftarrow, y), s\rangle$

Definice 15 (Tranzitivní množina)
Množina x se nazývá tranzitivní, jestliže platí

$$(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$$

Ekvivaletně

$$(\forall y)(\forall z)((y \in x \mathbin{\&} z \in y) \Rightarrow z \in x)$$

Definice 16 (Ordinál)
Množina x se nazývá ordinál, je-li tranzitivní a dobře uspořádaná relací „$\in$“.

Věta 12 (O ordinálech)

1. Je-li x ordinál a je-li $y \in x$, pak y je ordinál a $y = \langle(\leftarrow, y), \in\rangle$

2. Jsou-li x a y ordinály a $x \cong y$, pak $x = y$ (jedinečnost isomorfismu)

3. Jsou-li x a y ordinály, pak platí právě jedna z možností $x \in y$, $y \in x$, $x = y$

4. Jsou-li x, y, z ordinály, $x \in y$ a $y \in z$, pak $x \in z$

5. Je-li c neprázdná množina ordinálů, pak má nejmenší prvek:

$$(\exists x \in c)(\forall y \in c)(x \in y \ \vee \ x = y)$$

Věta 13 (Burali-Fortiův paradox)

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \text{ ordinál } \Rightarrow x \in z)$$

Lemma 14
Je-li a množina ordinálů a platí-li $(\forall x \in a)(\forall y \in x) y \in a$ (ekv. a je tranzitivní množina ordinálů), pak a je ordinál.

Věta 15 (O isomorfismu dobře uspořádané množiny a ordinálu)
Je-li $\langle a, r\rangle$ dobře uspořádaná množina, pak existuje právě jeden ordinál d, takový že $\langle a, r\rangle \cong \langle d, \in\rangle$.

Definice 17 (Typ $\langle a, r\rangle$)
Je-li $\langle a, r\rangle$ dobře uspořádaná množina, typ $\langle a, r\rangle$ je (jediný) ordinál c, že $\langle a, r\rangle \cong \langle c, \in\rangle$.

Značení: $\alpha < \beta$ bude sloužit místo $\alpha \in \beta$

Značení: $\alpha \leq \beta$ bude sloužit místo $(\alpha \in \beta \ \vee \ \alpha = \beta)$

Definice 18
Je-li x množina ordinálů, označme $\sup(x) = \bigcup x$.

Pokud $x \neq \emptyset$, označme $\min(x) = \bigcap x$.

Lemma 16

1. Pro ordinály α, β platí: $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$.

2. Je-li x množina ordinálů, pak $\sup(x)$ je nejmenší ordinál, který je větší nebo roven než všechny prvky množiny x. Podobně, je-li $x \neq \emptyset$ množina ordinálů, pak $\min(x)$ je nejmenší prvek množiny x.

Definice 19 (Ordinální následník)
Pro ordinál α, ordinální následník je

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

Lemma 17
Je-li α ordinál, pak $S(\alpha)$ je ordinál, $\alpha < S(\alpha)$ a

$$(\forall \beta)(\beta < S(\alpha) \iff \beta \leq \alpha)$$

Definice 20 (Izolovaný a limitní ordinál)
Ordinál α se nazývá izolovaný pokud existuje ordinál β, že $\alpha = S(\beta)$ nebo $\alpha = \emptyset$.

Pokud ordinál α není izolovaný, pak se nazývá limitní.

Definice 21 (Přirozená čísla)

$$0 = 0,\ 1 = S(0),\ 2 = S(1), \ldots$$

Ordinál α je přirozené číslo, jestliže

$$(\forall \beta)(\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \text{ je izolovaný})$$

ω je množina všech přirozených čísel.

Axiom 7 (Nekonečna)

$$(\exists x)(\emptyset \in x \mathbin{\&} (\forall y)(y \in x \Rightarrow S(y) \in x))$$

Lemma 18
Množina x zaručená axiomem nekonečna obsahuje všechna přirozená čísla.

Lemma 19 (Vlastnosti $\boldsymbol{\omega}$)

- ωje ordinál
- všechny ordinály menší než ωjsou izolované
- ωje limitní ordinál
- ωje nejmenší limitní ordinál

Věta 20 (Peanovy axiomy)

1. $0 \in \omega$

2. $(\forall n \in \omega) S(n) \in \omega$

3. $(\forall n, m \in \omega)(n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m))$

4. axiom indukce:

$$(\forall x)\Big(x \subseteq \omega \Rightarrow (0 \in x \;\&\; (\forall n)(n \in x \Rightarrow S(n) \in x)) \Rightarrow x = \omega\Big)$$

Definice 22 (Ordinální součet)
Buďte α, β ordinály. Ordinální součet:

$$\alpha + \beta = \mathrm{typ}\langle \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R\rangle$$

kde $R = \Big\{\langle\langle \xi, 0\rangle, \langle \eta, 0\rangle\rangle : \xi < \eta < \alpha\Big\} \cup \Big\{\langle\langle \xi, 1\rangle, \langle \eta, 1\rangle\rangle : \xi < \eta < \beta\Big\} \cup \Big\{\langle\langle \xi, 0\rangle, \langle \eta, 1\rangle\rangle : \xi < \alpha, \eta < \beta\Big\}$.

Lemma 21
Pro libovolné ordinály α, β, γ platí:

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

2. $\alpha + 0 = \alpha$

3. $\alpha + 1 = S(\alpha)$

4. $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$

5. je-li β limitní ordinál, pak $\alpha + \beta = sup\{\alpha + \xi, \xi < \beta\}$

Definice 23 (Ordinální součin, lexikografické uspořádání)
Jsou-li α, β ordinály, pak

$$\alpha \cdot \beta = \langle \beta \times \alpha, <_{\mathrm{LEX}}\rangle$$

kde $<_{\mathrm{LEX}}$ se nazývá lexikografické uspořádní a je definováno

$\langle \xi, \eta\rangle <_{\mathrm{LEX}} \langle \zeta, \delta\rangle$ kde $\xi, \zeta \in \beta$ a $\eta, \delta \in \alpha$ pokud $\xi < \zeta$ nebo $(\xi = \zeta \;\&\; \eta < \delta)$

Lemma 22
Pro libovolné ordinály α, β, γ platí:

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

2. $\alpha \cdot 0 = 0$

3. $\alpha \cdot 1 = \alpha$

4. $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \beta$

5. je-li β limitní ordinál, pak $\alpha \cdot \beta = sup\{\alpha \cdot \xi, \xi < \beta\}$

6. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Definice 24 (Mohutnosti množin)
Buďte a, b množiny.

1. Řekneme, že mohutnost množiny a je menší nebo rovna mohutnosti množiny b (a je subvaletní b), jestliže existuje prosté zobrazení z množiny a do množiny b. Značíme $a \preceq b$.

2. Řekneme, že mohutnost množiny a je rovna mohutnosti množiny b, pokud ex. bijekce mezi množinami a a b. Značíme $a \approx b$.

3. Řekneme, že mohutnost množiny a je ostře menší než mohutnost množiny b, pokud $a \preceq b$ & $\neg(a \approx b)$. Značíme $a \prec b$.

Lemma 23

1. $x \approx x$

2. $x \approx y \Rightarrow y \approx x$

3. $(x \approx y \;\&\; y \approx z) \Rightarrow x \approx z$

4. $x \preceq x$

5. $(x \preceq y \;\&\; y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$

Věta 24 (Kantor-Bernstein)

$$(a \preceq b \;\&\; b \preceq a) \Rightarrow a \approx b$$

Definice 25
Buď A množina. Pokud na A existuje dobré uspořádání, buď $|A|$ nejmenší ordinál α, pro který je $A \approx \alpha$.

Definice 26 (Kardinál)
Ordinál α se nazývá kardinál (kardinální číslo), pokud $\alpha = |\alpha|$. Ekvivalentně, α je kardinál právě když

$$(\forall \beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \neg(\beta \approx \alpha))$$

Lemma 25
Buďte α, β ordinály. Je-li $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, pak $|\beta| = |\alpha|$.

Lemma 26
Je-li $n \in \omega$, pak

1. $n \not\approx n + 1$
2. $(\forall \alpha)(\alpha \approx n \Rightarrow \alpha = n)$

Důsledek: ωje kardinál a každé $n \in \omega$ je kardinál.

Definice 27 (Konečná, spočetná a nespočetná množina)
Množina A je konečná, pokud $|A| < \omega$.

Množina A je spočetná, pokud $|A| \leq \omega$.

Množina A je nespočetná, pokud není spočetná.

Definice 28 (Sčítání a násobení kardinálů)
Jsou-li κ a λ kardinály, pak

$$\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$$

$$\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

Lemma 27
Pro $n, m < \omega$, $n \oplus m = n + m < \omega$ a $n \otimes m = n \cdot m < \omega$.

Lemma 28
Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál.

Věta 29
Je-li κ nekonečný kardinál, pak $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

Definice 29
Množina $\kappa \otimes \kappa$ je uspořádaná maximolexograficky $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \kappa)$ $\langle \alpha, \beta \rangle \lhd_{\text{MLEX}} \langle \gamma, \delta \rangle$ jestliže $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ nebo $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ & $\langle \alpha, \beta \rangle <_{\text{LEX}} \langle \gamma, \delta \rangle$

Axiom 8 (Potence)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \subseteq a \Rightarrow x \in z)$$

Definice 30 (Potenční množina)
Potenční množina množiny a je $\mathcal{P}(a) = \{x : x \subseteq a\}$.

Věta 30 (Cantor)
Pro každou množinu x, $x \prec \mathcal{P}(x)$.

Věta 31

$$(\forall \alpha)\Big(\alpha \text{ je ordinál} \Rightarrow ((\exists \kappa)\kappa \text{ je kardinál } \& \ \kappa > \alpha)\Big)$$

Definice 31 (Limitní kardinál a následník)
Je-li α ordinál, α^+ je nejmenší kardinál větší než α. Kardinál κ je následník, pokud existuje α pro které $\kappa = \alpha^+$, v opačném případě nazýváme κ limitní kardinál.

Definice 32 (Třídy)

- Třída všech ordinálů: $On = \{x : x \text{ je ordinál}\}$
- Univerzální třída: $V = \{x : x = x\}$
- Třída všech kardinálů: $Cn = \{x : x \text{ je kardinál}\}$

Věta 32 (Transfinitní indukce)
Je-li $C \subseteq 0n$, $C \neq 0$, pak C má nejmenší prvek.

Věta 33 (Transfinitní rekurze)
Je-li $F : V \to V$, pak existuje jediná $G : On \to V$ taková, že

$$(\forall \alpha)(G(\alpha) = F(G \restriction \alpha))$$

Definice 33
Pro ordinály α je funkce $\aleph_\alpha$ $(= \omega_\alpha)$ definována transfinitní indukcí takto:

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega$$

$$(\omega_\alpha)^+ = \omega_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}$$

Pro $\gamma \in On$, γ limitní je

$$\aleph_\gamma = \omega_\gamma = \sup\{\omega_\beta : \beta < \gamma\}$$

Lemma 34

1. Každý ω_α je kardinál.

2. Každý nekonečný kardinál je roven nějakému ω_α

3. Pro $\alpha < \beta$ je $\omega_\alpha < \omega_\beta$

4. ω_α je limitní kardinál právě když α je limitní ordinál, ω_α je kardinální následník právě když α je ordinální následník

Definice 34 (Kartézský součin)
Nechť a je množina, $\langle x_t, t \in a\rangle$ je soubor množin. Kartézským součinem nazýváme množinu

$$\prod_{t\in a} x_t = \Big\{ f : f \text{ je funkce }, \mathrm{dom}(f) = a \;\&\; ((\forall t) t \in a \Rightarrow f(t) \in x_t) \Big\}$$

Definice 35 (Rozklad množiny)
Říkáme, že množina r je rozkladem množiny x, je-li $x = \bigcup r$, $0 \neq r$ a

$$(\forall u, v)\Big((u \in r \;\&\; v \in r \;\&\; u \neq v) \Rightarrow u \cap v = 0\Big)$$

Definice 36 (Princip výběru)
Pro každý rozklad r množiny x existuje množina $y \subseteq x$, pro kterou platí

$$(\forall u \in r)(\exists t \in x) y \cap u = \{t\}$$

Definice 37 (Selektor)
Funkce f definovaná na množině x, která splňuje

$$(y \in x \;\&\; y \neq 0) \Rightarrow f(y) \in y$$

se nazývá selektor na množině x.

Axiom 9 (Výběru - Axiom of choice (AC))
Na každé neprázdné množině existuje selektor.

Lemma 35
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. axiom výběru

2. princip výběru

3. pro každou relaci s existuje funcke f taková, že $f \subseteq s$ & $\mathrm{dom}(f) = dom(s)$

4. je-li $x \neq 0$ a pro všechna $t \in x$ je $y_t \neq 0$, pak $\prod_{t \in x} y_t \neq 0$

Věta 36
(AC): sjednocení spočetného souboru spočetných množin je spočetná množina

Definice 38 (Řetězec)
Buď $\langle a, \leq \rangle$ uspořádaná množina, $c \subseteq a$. Množinu c nazveme řetězcem, pokud c v uspořádání $\leq$ je uspořádána lineárně.

Definice 39 (Horní mez, maximální prvek)
Nechť $\langle a, \leq \rangle$ je uspořádaná množina, $d \subseteq a$. Prvek $x \in a$ se nazývá horní mezí množiny d, jestliže $(\forall y \in d) y \leq x$.

Prvek x se nazývá maximálním prvekem množiny d, jestliže $x \in d$ a současně $(\forall y \in d)(y \neq x \Rightarrow \neg(y > x))$

Lemma 37 (Zornovo-Kuratowského, Zornovo, princip maximality)
Nechť $\langle a, \leq \rangle$ je uspořádaná množina taková, že každý řetězec v a má horní mez. Pak pro každé $x \in a$ existuje $m \in a$, že m je maximální prvek množiny a a $x \leq m$.

Věta 38
Z principu maximality plyne: pro každé dvě množiny M, N platí buď $M \preceq N$ nebo $N \preceq M$.

Věta 39 (Zonmelova, princip dobrého uspořádání)
Na každé množině m existuje relace r, že $\langle m, r \rangle$ je dobře uspořádaná množina. (Každou množinu lze dobře uspořádat.)

Věta 40
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. axiom výběru

2. princip maximality

3. princip dobrého uspořádání

Důsledky:

1. (AC): pro každou množinu A, množina $|A|$ existuje
2. (AC): je-li A nekonečná množina, pak $A \approx A \times A \approx A \times \{0, 1\}$
3. (AC): každou nekonečnou množinu lze rozložit na nekonečně mnoho nekonečných částí
4. (AC): pokud A, B jsou množiny a existuje surjektivní $f : A \to B$, pak $B \preceq A$.

Definice 40
Jsou-li A, B množiny, budeme značit

$$^{A}B = \{f : f \text{ je funkce}, f : A \to B\}$$

Podle (AC): pro kardinály κ, λ: $\kappa^\lambda = |^\lambda\kappa|$.

Věta 41
(AC): buďte κ, λ kardinálý, $\kappa \geq 2$, $\lambda \geq \omega$, $\kappa \leq \lambda$. Pak

$$\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$$

Definice 41 (Kofinální zobrazení)
Buďte α, β ordinály, $f : \alpha \to \beta$. Řekneme, že f zobrazuje α do β kofinálně (f je kofinální zobrazení), jestliže

$$(\forall \eta \in \beta)(\exists \xi \in \alpha)\eta \leq f(\xi)$$

Definice 42 (Kofinalita)
Pokud je β ordinál, pak kofinalita β ($\mathrm{cf}(\beta)$) je nejmenší ordinál α takový, že existuje kofinální zobrazení $f : \alpha \to \beta$.

Lemma 42
Existuje kofinální zobrazení $f : \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$, které je ostře rostoucí.

Lemma 43
Buďte α a β ordinály, nechť existuje kofinální ostře rostoucí zobrazení $f : \alpha \to \beta$. Pak $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Důsledek: $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$

Lemma 44
Pro každý limitní ordinál β, $\mathrm{cf}(\beta)$ je kardinál.

Definice 43 (Regulární a singulární kardinál)
Kardinál κ je regulární, je-li $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.
Pokud $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ říkáme, že κ je singulární.

Lemma 45
ω je regulární kardinál.

Lemma 46
(AC): je-li $\kappa \geq \omega$ kardinál, pak κ^+ je regulární.

Lemma 47
Je-li α limitní ordinál, pak $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Lemma 48 (Königovo)
(AC): nechť κ, λ jsou kardinály, $\kappa \geq \omega$, $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$. Potom $\kappa^\lambda > \kappa$.
Důsledek: Je-li $\lambda \geq \omega$ kardinál, pak $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$.

Věta 49 (Hypotéza kontinua)

$$2^\omega = \omega_1$$

Zobecněná hypotéza kontinua (GCH):

$$(\forall\alpha)2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$$

Lemma 50
(AC) + (GCH): nechť $\kappa, \lambda \geq 2$ jsou kardinály a alespoň jeden z nich je nekonečný. Pak platí:

1. je-li $\kappa \leq \lambda$, pak $\kappa^+ = \lambda^+$
2. je-li $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, pak $\kappa^\lambda = \kappa^+$
3. je-li $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, pak $\kappa^\lambda = \kappa$

Definice 44
(AC): Buď $I \neq \emptyset$ indexová množina, pro každé $i \in I$ buď κ_i kardinální číslo. Definujme

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \Big|\bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}\Big|$$

Věta 51 (Königova nerovnost)
(AC): Je-li $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ jsou κ_i a λ_i kardinální čísla, $\kappa_i < \lambda_i$, pak

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Věta 52 (Hausdorffova formule)
(AC): Jsou-li κ, λ nekonečné kardinály, pak

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$$

Definice 45 (Částečný selektor, pokrytí podmnožiny, filtrované prodloužení)
Mějme (indexovaný) soubor množin $A = \langle A_i : i \in I \rangle$.

Částečný selektor na souboru A je zobrazení f takové, že $\mathrm{dom}(f) \subseteq I$ a $\forall i \in I$ je $f(i) \in A_i$.

Buď S množina částečných selektorů souboru A. Říkáme, že S pokrývá konečné podmnožiny množiny I, jestliže pro každou konečnou $u \subseteq I$ existuje $f \in S$ že $u \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Zobrazení g se nazývá filtrovaným prodloužením množiny částečných selektorů S, je-li

$$\mathrm{dom}(g) = I \text{ a } (\forall u \subseteq I, u \text{ konečná})(\exists f \in S)\ f \restriction u = g \restriction u$$

Věta 53 (Princip kompaktnosti)
Je-li $A = \langle A_i : i \in I \rangle$ soubor konečných množin, pak každý systém částečných selektorů, který pokrývá konečné podmnožiny množiny I, má filtrované prodloužení.

Lemma 54 (O třech množinách)
Nechť $f : M \to M$ je takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \neq x$. Pak $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a pro všechna $i = 0, 1, 2$ platí, že $f[M_i] \cap M_i = \emptyset$

Věta 55 (Rado)
Nechť $\langle L, < \rangle$ je lineární uspořádní, $\mathcal{J}$ soubor intervalů v L a

$$\exists n \in \omega\ \forall x \in L\ |\{J \in \mathcal{J} : x \in J\}| \leq n$$

Pak $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{J}_n$ každé $\mathcal{J}_i$ je disjunktní soubor.

Lemma 56 (O disjunktním zjemnění, Bernstein, Menger, Sierpinski)
Buď κ nekonečný kardinál, buďte $\langle A_\alpha, \alpha \in \kappa \rangle$ množiny, pro každé $\alpha \in \kappa$ je $|A_\alpha| = \kappa$.

Pak existuje soubor $\{B_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ takový, že

1. $(\forall \alpha \in \kappa)|B_\alpha| = \kappa$
2. $\alpha \neq \beta \; B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$
3. $(\forall \alpha \in \kappa) B_\alpha \subseteq A_\alpha$

Definice 46 (Δ-systém)
Systém množin A se nazývá Δ-systém jestliže existuje množina K taková, že pro každé $A_0, A_1 \in A$, $A_0 \neq A_1$ pak $A_0 \cap A_1 = K$.

Množina K se nazývá jádro Δ-systému.

Lemma 57 (Δ-systém)
Nechť $\mathcal{A}$ je nespočetný systém konečných množin, $|\mathcal{A}|$ je regulární kardinál. Pak existuje Δ-systém $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$.

Definice 47 (Omezená a uzavřená množina)
Buď δ lineární ordinál.

Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je neomezená v δ, jestliže $(\forall \alpha < \delta)(\exists \beta \in A)\alpha < \beta$.

Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je uzavřená v δ, jestliže pro každé $\alpha < \delta$), α limitní, platí $\sup(A \cap \alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha \in A$

Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je uzavřená neomezená v δ, jestliže je současně uzavřená a neomezená.

Lemma 58
Nechť δ je limitní ordinál, $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$. Je-li $\tau < \mathrm{cf}(\delta)$ a $\{c_\xi : \xi < \tau\}$ soubor uzavřených neomezených v δ, pak $\bigcap\{c_\xi : \xi < \tau\}$ je uzavřený neomezený v δ.

Definice 48 (Stacionární množina)
Buď δ ordinál, $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, $S \subseteq \delta$. Řekneme, že množina S je stacionární v δ, jestliže pro každou $C \subseteq \delta$, C uzavřenou neomezenou v δ platí: $S \cap C \neq \emptyset$.

Definice 49 (Diagonální průnik)
Buď κ kardinál, $\langle A_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ soubor podmnožin kardinálu κ. Množina

$$\Delta A_\alpha = \{\gamma < \kappa : (\forall \alpha < \gamma)\gamma \in A_\alpha\}$$

se nazývá diagonálním průnikem souboru $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$.

Lemma 59

$$\Delta A_\alpha = \bigcap \{A_\alpha \cup (\alpha+1) : \alpha \in \kappa\}$$

Lemma 60
Nechť $\kappa > \omega$ je regulární kardinál a $\langle C_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ soubor množin uzavřených neomezených v κ. Pak $\Delta_{\alpha \in \kappa}$ je uzavřená neomezená množina v κ.

Definice 50 (Regresivní funkce)
Buď A množina ordinálních čísel, funkce $f : A \to On$ se nazývá regresivní na množině A, jestliž

$$(\forall \alpha \in A)(\alpha > 0 \Rightarrow f(\alpha) < \alpha)$$

Věta 61 (Fodorova, pressing-down lemma)
Nechť $\kappa > \omega$ je regulární kardinál, $E \subseteq \kappa$. Následující tvrzení jsou pak ekvivalentní:

1. E je stacionární v κ
2. je-li $f : E \to \kappa$ regresivní, pak existuje $\alpha < \kappa$ taková, že $f^{-1}\{\alpha\}$ je stacionární v κ
3. je-li $f : E \to \kappa$ regresivní, pak existuje $\alpha < \kappa$ taková, že $f^{-1}\{\alpha\}$ je neomezená v κ

Definice 51 (Vlamova matice)
Buď κ nekonečný kardinál. Soubor množin $\langle x(\alpha,\beta) : \alpha \in \kappa^+, \beta \in \kappa \rangle$ se nazývá Vlamovou maticí na κ^+, jestliže platí následující:

1. $(\forall \alpha < \kappa^+)(\forall \beta < \kappa)\ x(\alpha,\beta) \subseteq \kappa^+$
2. $(\forall \alpha < \kappa^+)(\forall \beta_1 \neq \beta_2,\ \beta_1, \beta_2 < \kappa)\ x(\alpha,\beta_1) \cap x(\alpha,\beta_2) = \emptyset$
3. $(\forall \beta < \kappa)(\forall \alpha_1 \neq \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 < \kappa^+)\ x(\alpha_1,\beta) \cap x(\alpha_2,\beta) = \emptyset$
4. $(\forall \alpha < \kappa^+)\ |\kappa^+ \setminus \bigcup_{\beta<\kappa} x(\alpha,\beta)| \leq \kappa$
5. $(\forall \beta < \kappa)\ |\kappa^+ \setminus \bigcup_{\alpha<\kappa^+} x(\alpha,\beta)| \leq \kappa$

Věta 62
Pro každý kardinál $\kappa \geq \omega$ Vlamova matice na κ^+ existuje.

Důsledek (Fodor): Je-li $\lambda = \kappa^+ > \omega$, pak každou stacionární množinu $S \subseteq \lambda$ lze rozložit na λ disjunktních stacionárních množin.

Definice 52 (Značení pro Ramseyovu větu)
Je-li X množina, označme $[X]^n = \{\kappa : \kappa \subseteq X \;\&\; |\kappa| = n\}$, kde $n \in \omega$.

Splňuje-li $H \subseteq X$, že $f \restriction [H]^n$ je konstatní, pak říkáme, že H je homogenní pro f.

Buďte κ, λ, μ kardinály, $r \in \omega$. Symbol $\kappa \longrightarrow (\lambda)^r_\mu$ pak čteme jako „pro každou množinu X, $|X| \geq \kappa$, pro každé zobrazení $f : [X]^r \to \mu$ existuje $H \subseteq X$, H je homogenní pro f a $|H| \geq \lambda$“.

Věta 63 (Ramsey)

$$\forall n, k \in \omega : \quad \omega \longrightarrow (\omega)^n_k$$

Věta 64
Pro každé přirozené číslo r, n, k existuje přirození číslo N takové, že $N \longrightarrow (r)^n_k$.

Věta 65
Pro každé přirozené číslo r, n, k existuje přirození číslo N takové, že pro každé obarvení $f : [N]^n \to k$ existuje homogenní množina H, $|H| \geq \max\{r, \min H\}$.

Věta 66 (Gödel)

$$2^\omega \not\longrightarrow (3)^2_\omega$$

Věta 67 (Sierpinski)

$$2^\omega \not\longrightarrow (\omega_1)^2_2$$

Axiom 10 (Fundovanosti (regularity))

$$(\forall a)(a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)(x \in a \;\&\; a \cap x = \emptyset))$$

Definice 53 (Množina V_α)
Pro každý ordinál α definujeme množinu V_α transfinitní rekurzí takto:

- $V_0 = 0$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\alpha = \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ pro α limitní

Lemma 68
Pro každý ordinál α platí:

1. V_α je tranzitivní množina
2. je-li $\beta < \alpha$, pak $V_\beta \leq V_\alpha$

Věta 69
Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. axiom fundovanosti
2. univerzum je $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha : \alpha \in On\}$