Teorie množin

přepsal Jakub Melka

18. února 2007

Obsah

Teorie množin

Kapitola 1

Množina dle Cantora

1.1 Cantorova definice množiny

„Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů m našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku M“

Příklady :

$$\begin{aligned} M &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ K &= \{a, b, c, d\} \\ L &= \varnothing \end{aligned}$$

$a \in M$ Prvek a je prvkem množiny M

1.2 Russelův paradox

Buď M množina všech množin K takových, že $K \notin K$.
Ptáme se, zda $M \in M$

1. $M \in M \Rightarrow M \notin M$ #spor

2. $M \notin M \Rightarrow M \in M$ #spor

Celá teorie je tedy sporná. Russelovu paradoxu se vždy vyhneme, pokud se na začátku vezmeme nějakou obrovskou množinu M, se kterou už pak dál nepracujeme, ale pracujeme s jejími prvky, částmi.

1.3 Richardův paradox

Buď n nejmenší číslo (přirozené), které nejde definovat méně než třiceti slovy českého jazyka.
(14 slov)

Řekněme, že ČJ má 10000 slov $\cdots \leq 10000^{31}$ - něco z toho jsou určitě definice čísel - je jich konečně, ale přirozených čísel je nekonečně $\Rightarrow$ takové číslo určitě existuje $14 < 30$ - číslo, o němž mluví věta ji nesplňuje - podezřelé věty, které mluví samy o sobě.

Kapitola 2

Množina dle Zermela-Fraenkela

2.1 Jazyk teorie množin

Obsahuje :

1. proměnná pro množiny a, b, c, d
2. binární predikátový symbol $\in$ (je obsažen v)
3. binární predikátový symbol $=$ (rovnost)
4. logické spojky $\&, \neg, \vee, \rightarrow$
5. kvantifikátory $\forall, \exists$
6. pomocné symboly - různé druhy závorek

Pozn. nemáme žádný jiný druh proměnných než množiny, můžeme mluvit jen o množinách.
$a \in M$ „a je prvkem M“
$M = N$ „M je rovno N“

Formule :

1. Jsou-li x,y proměnné pro množiny, pak $(x \in y)$ a $(x = y)$ jsou formule teorie množin, nazýváme je atomické.

2. Jsou-li φ a ψ formule teorie množin, pak $\neg\varphi$, $\varphi\&\psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ jsou také formule teorie množin.

3. Je-li φ formule jazyka teorie množin, pak také $(\exists x)\varphi$ a $(\forall x)\varphi$

4. Každá formule jazyka teorie množin vznikne konečným počtem použití tří vět výše.

Říkáme, že :

- výskyt proměnné x ve formuli φ je vázaný, je-li součástí nějaké podformule formule φ, která má tvar $(\exists x)\psi$ nebo $(\forall x)\psi$

- není-li výskyt proměnné x ve formuli φ vázaný, nazýváme takový výskyt volný

Říkáme, že proměnná x je ve formuli φ vázaná, má-li v ní vázaný výskyt. Obdobně proměnná x je ve formuli φ volná, má-li v ní volný výskyt.

Příklad : $(a \in M) \rightarrow (\forall a)(a \in t)$ proměnná „a“ je ve formuli volná i vázaná současně

Formule, která neobsahuje žádné volné proměnné, se nazývá uzavřená formule. Je-li φ formule, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ proměnné pro množiny, budeme psát $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v případě, že každé x_i, které se v φ vyskytuje, je ve φ volné.

Substituce : Buď $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formule, pak $\varphi(x_1, x_2, \ldots, u, \ldots, x_n)$ značí formuli, která z formule φ vznikne takto :

1. Každý volný výskyt proměnné x napíšeme u.

2. V každém vázaném výskytu proměnné u ji nahradíme symbolem z abecedy, který se v φ nevyskytuje.

Příklady :

$$\begin{aligned} \varphi &: ((\exists x)(x = y)\&(\forall z)(z \in x)) \\ x \rightarrow u &: ((\exists x)(x = y)\&(\forall z)(z \in u)) \\ x \rightarrow z &: ((\exists x)(x = y)\&(\forall t)(t \in z)) \end{aligned}$$

$x \in y$ - je povolena substituce $x \rightarrow y$ (splňuje pravidla), máme tedy $(y \in y)$, což má ale jiný význam, než předchozí pravidlo - substituce může změnit význam formule.

2.2 Axiomy

1. **Axiom existence** $(\exists x)(x = x)$ „Existuje alespoň jedna množina“

2. **Axiom extenzionality** $\forall x \forall y : ((\forall a)(u \in x \Leftrightarrow u \in y)) \Rightarrow (x = y)$ „Množiny, které mají stejné prvky, se rovnají“

3. **Schéma axiomů vydělení** Je-li $\varphi(x)$ formule jazyka teorie množin, která neobsahuje volně proměnnou z, pak následující formule $(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow ((x \in a) \& \varphi(x)))$ je axiom teorie množin

4. **Axiom dvojice** $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b)))$ „Libovolné dvě množiny určují dvouprvkovou množinu“

5. **Axiom sumy** $(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (\exists t)((t \in a) \& (x \in t)))$ „Ke každé množině existuje množina všech prvků jejich prvků.“

6. **Axiom potence** $(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (x \subseteq a))$ „Pro každou množinu existuje množina všech jejich podmnožin.“

7. **Schéma axiomů nahrazení** Je-li $\varphi(u, v)$ formule teorie množin, která neobsahuje volné proměnné w,z, pak formule $(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\varphi(u, v) \& \varphi(u, w)) \Rightarrow (v = w)) \Rightarrow (\forall a)(\exists z)(\forall v)((v \in z) \Leftrightarrow (\exists u)((u \in a) \& \varphi(u, v)))$ je axiom teorie množin.
   „Obrazem množiny při definovatelném zobrazení je opět množina“

8. **Axiom nekonečna** $(\exists z)((\varnothing \in z) \& (\forall x)((x \in z) \Rightarrow (x \cup \{x\} \in z)))$ „Existuje nekonečná množina“

9. **Axiom regularity (fundovanosti)** $(\forall a)((a \neq \varnothing) \Rightarrow (\exists x)((x \in a) \& (x \cap a = \varnothing)))$

Axiom extenzionality

$\forall x \forall y : ((\forall a)(u \in x \Leftrightarrow u \in y)) \Rightarrow (x = y)$

Platí i opačná implikace, než je v axiomu extenzionality, tj.
$\forall x \forall y : ((\forall a)(u \in x \Leftrightarrow u \in y)) \Leftrightarrow (x = y)$

Množina je kompletně určena svými prvky, nic jiného neuvažujeme, množiny se stejnými prvky jsou si rovné (v logice je rovnost tehdy, když „platí u obou členů stejné formule“).

Definice. Podmnožiny, inkluze
Říkáme, že množina x je podmnožinou množiny y, zapisujeme $x \subseteq y$, jestliže platí :
$(\forall a)(a \in x \Rightarrow a \in y)$

Říkáme, že množina x je vlastní podmnožinou množiny y, $x \subset y$, pokud platí :

$(x \subseteq y)\&(x \neq y)$

Lemma:

$$(\forall x), x \subseteq x, \neg(x \subset x) \tag{2.1}$$
$$(\forall x, y, z)(x \subseteq y)\&(y \subseteq z) \Rightarrow (x \subseteq z) \tag{2.2}$$
$$(\forall x, y, z)(x \subset y)\&(y \subseteq z) \Rightarrow (x \subset z) \tag{2.3}$$
$$(\forall x, y, z)(x \subseteq y)\&(y \subset z) \Rightarrow (x \subset z) \tag{2.4}$$
$$(\forall x, y)(x \subseteq y)\&(y \subseteq x) \Rightarrow x = y \tag{2.5}$$

Schéma axiomů vydělení

Pro každé φ je to jeden axiom. Proč nemůže být z volná proměnná v φ?

Položme $\varphi(x) : x \notin z$, pak
$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow ((x \in)\&(x \notin z)))$ #spor, neboť x zároveň nemůže náležet i nenáležet množině z.

Máme množinu a, formuli $\varphi(x)$
$z = \{x \in a : \varphi(x)\} = \{x : (x \in a)\&\varphi(x)\}$

z je tedy množina všech množin takových, že pro ně platí nějaká formule $\varphi(x)$.

Speciální volby $\varphi(x)$

- $x \in b : \{x \in a : x \in b\}$
- $x \notin b : \{x \in a : x \notin b\}$
- $x \neq x : \{x \in a : x \neq x\}$

Axiom dvojice

$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b)))$

Definice.
Jsou-li a,b množiny, pak neuspořádanou dvojicí množin a,b nazýváme množinu, jejímž jedinými prvky jsou množiny a,b. Značíme ji $\{a, b\}$. V případě, že $a = b : \{a\}$ a je jednoprvková.

$$(\forall x, y)\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y \tag{2.6}$$
$$(\forall x, y)\{x\} = \{x, y\} \Leftrightarrow x = y \tag{2.7}$$
$$(\forall x, y, u, w)\{x, y\} = \{u, w\} \Leftrightarrow (x = u \& y = w) \vee (x = v \& y = u) \tag{2.8}$$

Axiom sumy

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (\exists t)(t \in a \& x \in t))$

Definice.
$\cup a = \{x : (\exists t)(t \in a \& x \in t)\}$
Nazýváme tuto množinu sjednocením množiny a (sumou množiny a).

Lemma.
Pro $a = \{b, c\}$ je $\cup a = \{x : (x \in b) \vee (x \in c)\} = b \cup c$

Definice.
Neuspořádaná k-tice :

$$\begin{aligned}\{a,b,c\} &= \{a,b\}\cup\{c\}\\ &\vdots\\ \{a_1,a_2,\dots,a_k\} &= \{a_1,\dots,a_{k-1}\}\cup\{a_k\}\end{aligned}$$

Definice.
Pro neprázdnou množinu a, položíme :
$\cap a = \{x : (\forall t)(t \in a \Rightarrow x \in t)\}$ - průnik množiny a

Poznámka. Víme, že $a \neq \emptyset$, tedy existuje nějaké $w \in a$. $\varphi(x) : (\forall t)(t \in a \Rightarrow x \in t)$ neobsahuje volně proměnnou z, aplikujeme vydělení pro φ na množinu w : $\cap a = \{x : (\forall t)(t \in a \Rightarrow x \in t)\}$. Je-li $a = 0$, pak $\cup a$=0, ale $\cap a$ by měla být množina všech množin, ta ale neexistuje (proto jsme uvažovali neprázdnou množinu a, u prázdné nemá smysl se o průniku a sjednocení bavit).

Schéma axiomů nahrazení

Proč w,z nesmí být volné?
Uvažujme formuli $(u = v)\&(v \notin z)$, dosadíme-li ji za formuli $\psi(u, v)$, dostaneme se do sporu, ψ by měla jiný význam, druhá část implikace schémata říká :
„Obrazem množiny při definovatelném zobrazení je množina.“

2.3 Operace s množinami

Definice.
Jsou-li a,b množiny, pak průnikem množin a,b nazýváme množinu $a\cap b = \{x : x \in a\&x \in b\}$ To znamená množina prvků, kde každý prvek z této množiny je obsažen v a i b. Rozdílem nazýváme množinu $a\backslash b = \{x : x \in a\&x \notin b\}$.
$x \in a \cap b \Leftrightarrow (x \in a)\&(x \in b)$

Buď z libovolná množina (existuje kvůli axiomu existence). $\{x : x \in$

$z\&x \neq x\}$ - existuje, vydělení pro formuli $x \neq x$, je jediná (z axiomu extenzionality). Kdy je $t \in x$? Pokud $t \neq t$, ale to neplatí pro žádné t.

Definice.
$\varnothing$ je jediná množina y, splňující $(\forall x)(x \notin y)$. Nazýváme ji prázdnou množinou.

Definice.

O množinách a,b říkáme, že jsou disjunktní, pokud platí $a \cap b = \varnothing$.

Lemma:

$$\neg(\exists y)(y \in \varnothing) \tag{2.9}$$
$$(\forall x)(\varnothing \subseteq x) \tag{2.10}$$
$$(\forall x)(x \subseteq \varnothing \Leftrightarrow x = \varnothing) \tag{2.11}$$
$$(\forall a)a = \{x \in a : x = x\} \tag{2.12}$$

Věta. Neexistuje množina všech množin $\rightarrow$ Russelův paradox zmizí, zbavili jsme se ho.
$\neg(\exists z)(\forall x)x \in z$

Důkaz. Sporem : nechť existuje množina z, $(\forall x)x \in z.\varphi(x), x \notin x$. Vydělení pro tuto φ dává : $u = \{x \in z : x \notin x\}$ je množina. Musí platit $u \in z$. ?$u \in u$, tedy, podle vydělení pro $x \notin x$ musí tedy platit $u \notin u$ #spor. Druhá cesta : $u \notin u$ - u splňuje formuli $\varphi(u)$. Tedy, podle vydělení $u \in u$, což je také #spor.

Definice.
Uspořádaná dvojice množin a,b je množina $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Značíme ji $\langle a, b\rangle$

Lemma.
$(\forall x, y, u, v) : \langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow (x = u\&y = v)$

Definice.
Jsou-li dány množiny $a_1, a_2, \dots, a_k; k > 1$, pak uspořádanou k-tici definujeme

takto :
$\langle a_1 \rangle$, a dále indukcí
$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \rangle, a_k \rangle$

Lemma.
$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \& a_2 = b_2 \& \dots \& a_k = b_k)$

Definice.
Buďte a,b množiny. Kartézským součinem množin a,b nazveme množinu $\{\langle x, y \rangle : x \in a \& y \in b\}$ a budeme ji značit $a \times b$.

Potřebujeme vědět, že $\{\langle x, y \rangle : x \in a \& y \in b\}$ je množina : Zafixujeme $y \in b$. $\psi(x, v), v = \langle x, y \rangle . \psi(x, v) \& \psi(x, w); v = \langle x, y \rangle, w = \langle x, y \rangle$. v=w. Nahrazení pro a a pro ψ. $\dots (\exists z)(v \in z) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in a \& \psi(x, v)).z = \{\langle x, y \rangle : x \in a\} = H(u)$. Nevíme, zda soubor všech těchto množin je množina, musíme tedy tuto úvahu zopakovat. $\psi_1(y, v) : v = H(y).\psi_1(y, v) \& \psi_1(y, w) : v = H(y), w = H(y), v = w.z = \{H(y) : y \in b\}$, z je tedy množina díky nahrazení pro ψ_1 a množinu b. Pak tedy $\cup\{H(y) : y \in b\} = \{\langle x, y \rangle : x \in a \& y \in b\}$ je množina podle sumy.

Definice.
Binární relace R je množina, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice.
Definiční obor relace R : $dom(R) = \{x : (\exists y)\langle x, y \rangle \in R\}$
Obor hodnot relace R : $rng(R) = \{x : (\exists x)\langle x, y \rangle \in R\}$
Pro každou relaci R $dom(R)$ a $rng(R)$ jsou množiny (plyne z nahrazení).

Definice.
Je-li R relace : Inverzní relace k R je relace $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$. Dále platí, že $(R^{-1})^{-1} = R$

Definice.
Jsou-li R,S relace, složená relace:
$S \circ R = \{\langle x, z \rangle : (\exists y)\langle x, y \rangle \in R \& \langle y, z \rangle \in S$

T,S,R jsou relace :

$$
\begin{aligned}
(T \circ S) \circ R &= T \circ (S \circ R) \\
(S \circ R)^{-1} &= R^{-1} \circ S^{-1}
\end{aligned}
$$

Definice.
Množina f se nazývá funkce, pokud f je relace a platí : $(\forall x \in dom(f))(\forall y_1, y_2)(y_1 \in rng(f) \& y_2 \in rng(f) \& \langle x, y_1 \rangle \in f \& \langle x, y_2 \rangle \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Je-li f funkce a $\langle x, y \rangle \in f$, označíme $y = f(x)$. $f : A \to B$ označuje f je funkce, $A = dom(f), rng(f) \subseteq B$.
Pro $C \subseteq A : f \wedge C = f \cap (C \times B)$ - <u>zúžení</u> funkce f na množině C.

$f \text{''} C = rng(f \wedge C) = \{y : (\exists x)(x \in C \& \langle x, y \rangle \in f)\} = \{f(x) : x \in C\}$

Definice.
$f : A \to B$. Říkáme, že f je

- injekce (prostá), je-li f^{-1} funkce
- surjektivní (f je na), pokud rng(f) = B
- bijekce, je-li prostá a surjektivní zároveň

Kapitola 3

Uspořádání a ordinální čísla

3.1 Uspořádání

Definice.
Ostře uspořádaná množina je uspořádaná dvojice $\langle a, R\rangle$; kde a je množina a $R \subseteq a \times a$, R splňuje :
$\forall x, y, z \in a$:

- tranzitivita : $(\langle x, y\rangle \in R \& \langle y, z\rangle \in R) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$
- antireflexivita : $\neg(\langle x, x\rangle \in R)$

Definice.
Ostré uspořádání R se nazývá lineární, jestliže $(\forall x, yina)$ platí $\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \vee x = y$

*Poznámka.*Pokud R je uspořádání na množině a, používáme xRy pro zápis $\langle x, y\rangle \in R$.

Definice.
$\langle a, R\rangle, \langle b, S\rangle$ Je-li $f : a \to b$ bijekce, tj. $(\forall x, y \in a)\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle \in S$, pak říkáme, že f je izomorfismus mezi $\langle a, R\rangle$ a $\langle b, S\rangle$. Dále říkáme, že tyto uspořádání jsou isomorfní, pokud existuje mezi nimi isomorfismus.

Definice.
Nechť R je uspořádání na množině a, $m \subseteq a, x \in a$. Pak říkáme, že

- x je největší prvek množiny m, $x \in m$ a pro $\forall y \in m$ platí yRx nebo $y = x$.
- x je nejmenší prvek množiny m, $x \in m$ a pro $\forall y \in m$ platí xRy nebo $x = y$.
- x je maximální prvek množiny m, $x \in m$ a pro $\forall y \in m$ platí $\neg(xRy)$.
- x je minimální prvek množiny m, $x \in m$ a pro $\forall y \in m$ platí $\neg(yRx)$.

Definice.
Buď $\langle a, R\rangle$ ostře uspořádaná množina. Řekneme, že uspořádání R je dobré ($\langle a, R\rangle$ je dobře uspořádaná), pokud každá neprázdná podmnožina množiny a má nejmenší prvek.

Definice.
Každé dobré uspořádání je lineární, pokud $\forall x, y \in a; x \neq y; m = \{x, y\} \subseteq a$, tedy má nejmenší prvek. Je-li nejmenším prvek x, je xRy, pokud y, tak yRx. Opačně to neplatí, ne každé lineární uspořádání je dobré.

Definice.
Je-li $\langle a, R\rangle$ ostře uspořádaná množina, $x \in a$, označme $(\leftarrow, x) = \{y \in a : yRx\}$ množinu všech předchůdců prvku x; uspořádání $R \cap (\leftarrow, x) \times (\leftarrow, x)$ budeme značit $\langle(\leftarrow, x), R\rangle$.

Lemma 1.
Nechť $\langle a, R\rangle$ je dobře uspořádaná množina, $x \in a$. Pak $\langle a, R\rangle$ a $\langle(\leftarrow, x), R\rangle$ nejsou isomorfní.

Příklad.
$a = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
$(\leftarrow, \frac{1}{3}) = \{\frac{1}{n+3} : n \in \mathbb{N}\}$

*Důkaz.*Sporem, předpokládejme, že $f : \langle a, R\rangle \to \langle(\leftarrow, x), R\rangle$ je isomorfismus. $m = \{y \in a : f(x) \neq y\}$. $m \neq \varnothing$, $x \in a$. $(x \notin (\leftarrow, x) \& f(x) \in (\leftarrow, x)) \Rightarrow x \neq f(x) \Rightarrow x \in m$. To znamená, že m je neprázdná. $m \neq \varnothing$ a $f : \langle a, R\rangle$ je dobře uspořádaná, tedy existuje nejmenší prvek z množiny m. Kdykoliv $t \in a, tRz$, pak $t \notin m$, tedy $f(t) = t, f(z) \neq z$. R je lineární uspořádání. Musí tedy platit buď $yRf(z)$ nebo $f(z)Rz$. Prozkoumáme tyto možnosti :

1. $zRf(z)$: $f(z) \in (\leftarrow, x)$ a $zRf(z)$, tedy $zRx, z \in (\leftarrow, x)$. Kdykoliv $t \in a : tRz : f(t) = t, f(t)Rz$. f je izomorfismus : zRt $f(z)Rf(t)$, $zRf(z)$, $zRf(t)$. Z toho plyne $f(z) \neq z$ - #spor.

2. $f(z)Rz$: Položíme $t = f(z)$. Protože tRz, je $f(t) = t$. Současně $t = f(z), t \neq z, f(t) = f(z)$. Pak ale f není prosté, což je # spor.

Lemma 2.
Jsou-li $\langle a, R\rangle$ a $\langle b, S\rangle$ dvě izomorfní dobře uspořádané množiny, pak mezi nimi existuje jediný izomorfismus.

*Důkaz.*Sporem, předpokládejme, že existují dva různé isomorfismy f, g. Protože $f \neq g$, $m = \{x \in a : f(x) \neq g(x)\}$, $m \neq \varnothing$. Tedy, protože $\langle a, R\rangle$ je dobře uspořádaná, existuje $z \in a$, z je nejmenší prvek množiny m. Mohou nastat právě dvě možnosti : $f(z)Sg(z)$ a $g(z)Rf(z)$.

1. Nechť $f(z)Sg(z)$. Protože f je izomorfismus, kdykoli tRz je $f(t)Sf(z)$. Protože $g(t) = f(t)$ pro všechna t tRz $g(t)Sf(z)$, neboť $g(t) = f(t)$. Máme $f(z)Sg(z)$. Je-li zRt, protože g je izomorfismus, musí platit $g(z)Sg(t)$, $f(z)Sg(z)$ a $f(z)Sg(t)$. Bod $f(z)$ není v oboru hodnot funkce g, tedy g není izomorfismus, #spor.

2. Nechť $g(z)Rf(z)$. Protože g je izomorfismus, kdykoli tRz je $g(t)Sg(z)$. Protože $f(t) = g(t)$ pro všechna t tRz $f(t)Sg(z)$, neboť $f(t) = g(t)$. Máme $g(z)Sf(z)$. Je-li zRt, protože f je izomorfismus, musí platit $f(z)Sf(t)$, $g(z)Sf(z)$ a $g(z)Sf(t)$. Bod $g(z)$ není v oboru hodnot funkce f, tedy f není izomorfismus, #spor.

Věta.
Buďte $\langle a, R\rangle$ a $\langle b, S\rangle$ dvě dobře uspořádané množiny. Pak nastává právě jedna z následujících tří možností.

(a) $\langle a, R\rangle$ je izomorfní s $\langle b, S\rangle$

(b) existuje nějaké $x \in a$, že $\langle(\leftarrow, x), R\rangle$ je izomorfní s $\langle b, S\rangle$

(c) existuje nějaké $y \in b$, že $\langle(\leftarrow, y), S\rangle$ je izomorfní s $\langle a, R\rangle$

*Důkaz.*Položíme $f = \{\langle u, v\rangle : u \in a, v \in b, \langle(\leftarrow, u), R\rangle$ je izomorfní s $\langle(\leftarrow, v), S\rangle\}$. f je množina.

(a) f je funkce. Nechť $u \in a; v_1, v_2 \in b; \langle u, v_1\rangle \in f \& \langle u, v_2\rangle \in f$. Máme ukázat, že $v_1 = v_2$. Kdyby ne : $v_1 \neq v_2$, budeme předpokládat $v_1 S v_2$. Existuje izomorfismus $f : \langle(\leftarrow, v_1), S\rangle \to \langle(\leftarrow, u), R\rangle$. Existuje izomorfismus $g : \langle(\leftarrow, u), R\rangle \to \langle(\leftarrow, v_2), S\rangle$. $g \circ f$ je izomorfismus, mezi $\langle(\leftarrow, v_1), S\rangle \to \langle(\leftarrow, v_2), S\rangle$. #spor s lemmatem 1.

(b) f je prostá funkce. $u_1, u_2 \in a, v \in b$. $\langle u_1, v\rangle \in f$ a $\langle u_2, v\rangle \in f$. Máme ověřit $u_1 = u_2$, důkaz je stejný jako v předchozím bodě.

(c) Jsou-li $\langle u_1, v_1\rangle$, $\langle u_2, v_2 \in f$, pak $u_1 R u_2 \Leftrightarrow v_1 S v_2$. Existuje isomorfismus $g : \langle(\leftarrow, u_2), R\rangle \to \langle(\leftarrow, v_2), S\rangle$, protože $u_1 R u_2 : g(u) = w \in (\leftarrow, v_2)$. $g \wedge \langle(\leftarrow, u_1), R\rangle$je izomorfismus na $\langle(\leftarrow, w), S\rangle$. $\langle u_1, w\rangle \in f$. Víme, že f je funkce, tedy $w = v_1$. $v_1 \in (\leftarrow, v_2)$, neboli $v_1 S v_2$. $\langle w, v_1\rangle$, $\langle u_1, v_1\rangle$. Opačná implikace je analogická s použitím f je prostá funkce.

Věta.
Buďte $\langle a, R\rangle$ a $\langle b, S\rangle$ dvě dobře uspořádané množiny. f je prostá funkce, zachovává uspořádání, f je isomorfismus mezi $\langle dom(f), R\rangle$ a $\langle rng(f), S\rangle$
Důkaz.

Položíme $m = \{u \in a : \nexists v \in b : \langle u, v\rangle \in f\}$
Položíme $n = \{v \in b : \nexists u \in a : \langle u, v\rangle \in f\}$
Možnosti :

(a) $m = \emptyset, n = \emptyset$. f je izomorfismus mezi $\langle a, R\rangle$ a $\langle b, S\rangle$.

(b) $m \neq \varnothing, n = \varnothing$. $\langle a, R\rangle$ dobře uspořádaná, $\exists x, x$ je nejmenší prvek množiny m. V tom případě $(\leftarrow, x) = dom(f)$. $u \in dom(f), xRu$: $h : (\leftarrow, u) \rightarrow (\leftarrow, v)$. $h \wedge (\leftarrow, x) \rightarrow (\leftarrow, h(x))$ #spor, $x \in m$.

(c) $m = \varnothing, n \neq \varnothing$ Položme y nejmenší prvek množiny n v uspořádání S, máme f je isomorfismus mezi $\langle a, R\rangle$ a $\langle(\leftarrow, y), S\rangle$.

(d) $m \neq \varnothing, n \neq \varnothing$ Tato možnost nemůže nastat : Položme x je nejmenší prvek množiny m a y je nejmenší prvek množiny n. f je izomorfismus mezi $\langle(\leftarrow, x), R\rangle$ a $\langle(\leftarrow, y), S\rangle$. Pak z definice $f : \langle x, y\rangle \in f$. Protože ale $x \notin m, y \notin n$, #spor.

3.2 Ordinály

Definice.
Množina x se nazývá tranzitivní, pokud splňuje : $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$.
Příklad.

$$\{\varnothing\} - ANO$$
$$\{\{\varnothing\}\} - NE$$

Definice.
Množina je ekvivalentní s množinou, pokud
$(\forall y)(\forall z)((y \in x \& z \in y) \Rightarrow z \in x)$

Definice.
Množina x je ordinál, je-li tranzitivní a současně dobře uspořádaná relace E.

Věty o ordinálech :

1. Je-li x ordinál a $y \in x$, pak y je ordinál a $y = \langle(\leftarrow, y), E\rangle$

2. Jsou-li x,y ordinály, x a y jsou izomorfní, pak $x = y$

3. Jsou-li x,y ordinály, pak platí právě jedno z :
   (a) $x = y$
   (b) $x \in y$
   (c) $y \in x$
4. Jsou-li x,y,z ordinály, $x \in y \& y \in z$, pak $x \in z$
5. Je-li C neprázdná množina ordinálů, pak $(\exists x \in C)(\forall y \in C)(x = y \vee x \in y)$

Důkaz.

1. x je ordinál, $y \in x$. y je tranzitivní množina : zvolme u,v tak, aby platilo $u \in v \& v \in y$. Protože x je tranzitivní množina a máme $v \in y \& y \in x$, platí $v \in x$. Protože $v \in x$ a $u \in v$, protože x je tranzitivní množina, máme $u \in x$. $u \in v \& v \in y$: Protože x je uspořádaná množina, $u \in y$. Dokážeme, že y je ordinál. y je dobře uspořádaná relací E. Je-li $u \in y$, máme $y \in x$ a tedy $u \in x$. Protože $\langle x, E\rangle$ je uspořádaná : $u \notin u$, E je antireflexivní. Tranzitivita : $u, v, w \in y$, nechť $u \in v \& v \in w$. Z tranzitivity množiny x : $u, v, w \in x$. Protože E množiny x uspořádává $u \in w$, nechť $m \subseteq y, m \neq \varnothing$. Pro každé $u \in m$ je $u \subset y, y \in x, u \in x$ - z tranzitivity x. $m \subseteq x, \langle x, E\rangle$ dobře uspořádaná, $m \neq \varnothing$. Tedy existuje $z \in m$ tak, že pro všechna $u \in m$: $z = u$ nebo $z \in u$. Zřejmě z je nejmenší prvek množiny m také v $\langle y, E\rangle$. Dokázali jsme, že y je ordinál. Máme $\langle x, E\rangle, y \in x, (\leftarrow, y) = \{u : u \in y\} = y$.
2. Jsou-li x,y ordinály, x je izomorfní s y, pak $x = y$. Buď $f : x \to y$ izomorfismus. $x = \{z : z \in x\}, y = \{f(z) : z \in x\} = \{z : z \in x\} = x$. K důkazu stačí ověřit, že pro všechna $z \in x$ je $f(z) = z$. Sporem : Předpokládejme, že $\exists z_0 \in x$, že $f(z_0) \neq z_0$. $m = \{z \in x : f(z) \neq z\} \neq \varnothing$. Protože x je dobře uspořádaná $\exists t \in m$, že t je nejmenší prvek množiny m. f je izomorfismus. $(\forall u) u \in t \Leftrightarrow f(y) \in f(t)$. Kdykoli $u \in t$, pak protože t je nejmenší prvek množiny m, máme $f(u) = u$. $t = \{u : u \in t\} = \{f(u) : u \in t\} = f(t)$. $t = f(t)$, spor s předpokladem $t \in m$. $\forall z \in x : f(z) = x \ldots y = x$.
3. x,y ordinály. Podle věty o dobře uspořádaných množinách : buď x je izomorfní y : Podle (2), $x = y$ nebo $\exists z \in x, (\leftarrow, z)$ je izomorfní s y.

Podle (1), $(\leftarrow, z) = z$. $z \in x$, z je izomorfní s y. Podle (2), $z = y$, a máme $y \in x$. Třetí možnost analogicky, $x \in y$.

4. x, y, z ordinály. $x \in y \& y \in z$. Pak ale $x \in z$, neboť z je tranzitivní množina.

5. Buď C neprázdná množina ordinálů. Zvolme libovolné $t \in C$. Pro $y \in C$ může nastat dle (3) $y = t, t \in y, y \in t$. Nechť pro žádné $y \in C$ nenastává $y \in t$. Pak stačí položit $x = t$. V opačném případě $\exists y \in C$, že $y \in t$. $m = \{y \in C : y \in t\} \neq \varnothing$. t ordinál, tedy dobře uspořádaná množina, $m \subseteq t, m \neq \varnothing$, $\exists x, x \in m$ a $\forall y \in m : (x = y) \vee (x \in y)$. Pro $y \in C, y \notin m$; pak buď $y = t, m \subseteq t, x \in t$ nebo $t \in y, x \in t, x \in y$ dle (4).

Příklady ordinálů.

$$
\begin{aligned}
&\varnothing \\
&\{\varnothing\} \\
&\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
\end{aligned}
$$

$\varnothing$ je nejmenší ordinál.

Věta - Buccati-Forte paradox :
$\neg(\exists z)(\forall x)(x \text{ je ordinál} \rightarrow x \in z)$.

*Důkaz.*Sporem. Nechť takové z existuje. Podle vydělení pro formuli „x je ordinál“ existuje nějaké $o = \{x : x \text{ je ordinál }\}$. Z vět o ordinálech plyne, že o je tranzitivní množina ostře a dobře uspořádaná relací E. o je ordinál, máme tedy současně $o \in o, o = o$, #spor s (3), může být pouze jedna z možností, nikoliv obě současně.

Lemma 3 :
Nechť a je tranzitivní množina ordinálů. Pak a je ordinál.

*Důkaz.*Víme, že a je tranzitivní množina. Máme ukázat, že relace E je dobré uspořádání množiny a. $x \in a, x$ je ordinál, $x \in x$ antireflexivní. Nechť tedy nějaké $x, y, z \in a$ $x \in y \& y \in z \to x \in z$ (z věty o ordinálech). E je tranzitivní. Dokážeme, že je to dobré uspořádání. $c \subseteq a, c \neq \emptyset$, podle věty o ordinálech má c nejmenší prvek, tedy a je ordinál.

Věta (izomorfismus dobře uspořádané množiny a ordinálu) :
Buď $\langle a, R\rangle$ dobře uspořádaná množina. Pak existuje právě jeden ordinál c, že $\langle a, R\rangle$ je izomorfní s c.

*Důkaz.*Unicita : kdyby existovaly $c, d; c \neq d$ dva ordinály, oba isomorfní s $\langle a, R\rangle$. Pokud $c \in d$, pak #spor: d dobře uspořádaná, izomorfní svému počátečnímu úseku c.

Existence :
$b = \{t \in a : (\exists x), x$ je ordinál $\& x$ je izomorfní s $\langle(\leftarrow, t), R\rangle\}$

Buď f funkce, $dom(f) = b$. Pro každé $t \in b$ buď $f(t)$ ordinál izomorfní s $\langle(\leftarrow, t), R\rangle$. Položíme $c = rng(f)$. c je množina ordinálů. Mějme $u \in c$,$v \in u$. $\exists t \in a\langle(\leftarrow, t), R\rangle$ je isomorfní s u. $g : (\leftarrow, t) \to u$ je isomorfismus, $v \in u$. $t_0 = g^{-1}(v), g[(\leftarrow, t_0)] = (\leftarrow, v) = v$. $v \in rng(f) = c$. Ukázali jsme, že c je tranzitivní množina ordinálů a tedy c je ordinál. Zbývá ukázat, že $b = a$ a že f je isomorfismus. f zachovává uspořádání, je prosté a zobrazuje b na c. To plyne ze dvou předchozích lemmat.
Důkaz, že $b = a$: sporem : Nechť $b \neq a$. Existuje $t \in a, t \notin b, \{t \in a : t \notin b\} \neq \emptyset$ má nejmenší prvek t_0. Pochopitelně $\langle(\leftarrow, t_0), R\rangle = \langle b, R\rangle$. f je izomorfismus b na c. Podle definice $t_0 \in b, f(t_0) = c$ #spor a tedy $b = a$.

Definice.
Je-li $\langle a, R\rangle$ dobře uspořádaná množina, pak typ jejího uspořádání, typ $(\langle a, R\rangle)$ je ten jediný ordinál c, že $\langle a, R\rangle$ je izomorfní s c.

Značení

Nadále budeme ordinály značit písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \ldots$ Pro ordinály α, β budeme psát $\alpha < \beta$, právě tehdy když $\alpha \in \beta$, $\alpha \leq \beta$ právě když $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Definice.
Je-li x množina ordinálů, označíme $sup(x) = \cup x$, pokud $x \neq \emptyset$, $min(x) = \cap x$.

Lemma 4.

(1) Pro ordinály α, β platí $(\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta)$

(2) Je-li x množina ordinálů, pak $sup(x)$ je nejmenší ordinál, který je větší nebo roven všem prvkům množiny x. Je-li x neprázdná, pak $\cap x$ je nejmenší ordinál v množině x

Důkaz.

(1) „$\Rightarrow$“Zřejmé, je-li $\gamma \in \alpha$, $\gamma \in \alpha$.

  (a) $\alpha = \beta \Rightarrow \gamma \in \beta$

  (b) $\alpha \in \beta \Rightarrow \gamma \in \beta$

  Tedy pokaždé $\gamma \in \beta$.
  „$\Leftarrow$“ Je-li $\alpha \subseteq \beta$, máme ukázat, že buď $\alpha \in \beta$ nebo $\alpha = \beta$. Stačí vyloučit případ $\beta \in \alpha$ a současně $\alpha \leq \beta$, pak ale musí $\beta \in \beta$, což je #spor.

(2) $sup(x) = \cup x$. Prvky množiny x jsou ordinály, tedy $\cup x$ je množina ordinálů. $\cup x$ je tranzitivní množina : buď $\alpha \in \cup x$, $\beta \in \alpha$, máme ukázat $\beta \in \cup x$. $\alpha \in \cup x$ právě když $(\exists \gamma)(\gamma \in x \& \alpha \in \gamma)$. γ je ordinál, $\gamma \in x, \alpha \in \gamma, \beta \in \alpha, \beta \in \gamma \Rightarrow \beta \in \cup x$, takže je tranzitivní a $\cup x = sup(x)$ je ordinál.

  Zbývá dokázat, že $\cup x = sup(x)$ je nejmenší ordinál větší nebo roven všem prvkům z x. Nechť tedy $\alpha \in x$. Kdykoli $\gamma \in \alpha$, pak $\gamma \in \cup x$. $\alpha \subseteq \cup x, \alpha \leq sup(x)$. Buď δ libovolný ordinál, $\delta < sup(x), \delta \in \cup x$, tedy existuje $\alpha \in x$, že $\delta \in \alpha, \delta < \alpha$. Pro toto α máme $\neg(\alpha \leq \delta)$. $\cup x$ je tedy nejmenší ordinál $\geq$ všem prvkům z x.

$\cap x$: Nechť $x \neq \emptyset$. $\cap x$ je množina ordinálů, $\alpha \in \cap x$ a $\beta \in \alpha, \beta \in \cap x$ (obdobně jako pro $\cup x$). $\cap x$ je tranzitivní, a tedy ordinál. Nechť $\alpha \in x$. $\cap x \subseteq \alpha$ $min(x) \leq \alpha$ $\forall \alpha \in x$. Zbývá ukázat, že $\cap x \in x$. x je neprázdná množina ordinálů. Z věty (5) $(\exists t \in C)(\forall y \in C)(t = y \vee t \in y)$ stačí ověřit, že $t = \cap x$. Protože $t \in x$, máme $\cap x \subseteq t$. Je-li $\alpha \in t$ a je-li $\gamma \in x$ libovolné, díky volbě t máme možnosti :

(a) $t = \gamma \Rightarrow \alpha \in \delta$
(b) $t \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \delta$

a tedy $t \subseteq \cap x$.

Definice.
Pro ordinál α definujeme ordinální následník ordinálu α $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma 5.
Pro ordinál $\alpha, S(\alpha)$ je ordinál, $\alpha < S(\alpha)$, $(\forall \beta)(((\beta \text{ ordinál })\& \beta < S(\alpha)) \Rightarrow \beta \leq \alpha))$.

Důkaz. $S(\alpha)$ je ordinál. $S(\alpha)$ je tranzitivní množina : $\gamma \in S(\alpha), \beta \in \gamma$ libovolně, máme ukázat, že $\beta \in S(\alpha)$. Možnosti :

(a) $\gamma \in \alpha : \beta \in \gamma, \alpha$ je tranzitivní, a tak $\beta \in \alpha \subseteq S(\alpha)$
(b) $\gamma \in \{\alpha\} : \gamma = \alpha, \beta \in \gamma \Rightarrow \beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in S(\alpha)$

$S(\alpha)$ je dobře uspořádaná náležením : $\beta \in \gamma, \gamma \in \delta$. $\beta, \gamma, \delta \in S(\alpha)$. Musíme ověřit, zda $\beta \in \delta$. Zajímá nás $\gamma \in \{\alpha\}$. $\beta \in \gamma, \gamma = \alpha$. Ověříme, že $\beta \in \alpha$. α je tranzitivní množina. $S(\alpha)$ je tedy ordinál. $\beta < S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

(a) $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta < \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$
(b) $\beta \in \{\alpha\} \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$

Definice.
Ordinál α se nazývá <u>izolovaný</u>, jestliže $\alpha = \emptyset \vee (\exists \beta)(\beta \text{ je ordinál } \& \alpha = S(\beta))$. Ordinál α se nazývá <u>limitní</u>, pokud není izolovaný.

3.3 Přirozená čísla

Definice.

$$1 = S(0), 2 = S(1), 3 = S(2), \ldots$$

Definice.
Ordinál α je přirozené číslo, je-li $(\forall\beta)((\beta$ je ordinál $\&\beta \leq \alpha) \Rightarrow \beta$ je izolovaný ordinál).

Axiom nekonečna

S pomocí definice následníka ordinálu můžeme tento axiom zapsat takto : $(\exists x)(\varnothing \in x\&(\forall y)(y \in x \Rightarrow S(y) \in x))$

Věta.
Množina x zaručená tímto axiomem nekonečna obsahuje všechna přirozená čísla, tj. je to množina $\mathbb{N}$.

*Důkaz.*Sporem, předpokládejme, že existuje takové přirozené číslo n, že $n \notin x$. Možnosti : $n = 0$ #spor, neboť $0 \in x$. $n \neq 0$: n je ordinál, $(\forall\beta)(\beta \leq n) \Rightarrow \beta$ je izolovaný ordinál. $\exists k \in \mathbb{N}, n = S(k)$. Možnosti : $k \in x : n = S(k) \in x$ #spor, axiom nekonečna. Druhá možnost : $k \notin x$. n je ordinál, $k \in n, k \notin x$. Tedy množina $m = \{k : k \in n\&k \notin x\}, m \neq \varnothing$. Existuje tedy nejmenší prvek množiny m, označíme ho $l.l \notin x$. Možnosti : $l = 0$ #spor, neboť $0 \in x$. $l \neq 0$. l je ordinál, $(\forall\beta)(\beta \leq l) \Rightarrow \beta$ je izolovaný ordinál. Existuje přirozené číslo p takové, že $l = S(p)$. $p \notin m$, protože $p < l\&l$ je nejmenší prvek množiny m. $p \in x$, tedy $S(p) \in x$, $S(p) = l \notin x$ #spor.

Věta.
ω je množina všech přirozených čísel. Existence : axiom nekonečna + vydělení pro formuli „α je přirozené číslo“.

ω je ordinál : ω je množina ordinálů, je to tranzitivní množina. $\alpha \in \omega, \beta \in \alpha$: β je izolovaný ordinál. $\gamma < \beta$ je izolovaná, $\beta \in \omega, \omega$ je ordinál.

Definice.
ω je limitní ordinál. ω je dokonce nejmenší limitní ordinál.

Důkaz. Sporem. Kdyby existovalo nějaké $\alpha, \omega = S(\alpha), \omega = \alpha \cup \{\alpha\}$. Pak ale ω je přirozené číslo a musí tedy platit, že $\omega \in \omega$, což je # spor.

Věta (Peanovy axiomy) :

(1) $0 \in \omega$

(2) $(\forall n)(n \in \omega \Rightarrow S(n) \in \omega)$

(3) $(\forall n, m)((n, m \in \omega \& n \neq m) \Rightarrow S(n) \neq S(m))$

(4) indukce $(\forall x)((x \subseteq \omega \& (0 \in x \& (\forall n)(n \in x \Rightarrow S(n) \in x)) \Rightarrow x = \omega$

3.4 Ordinální aritmetika

Definice.
Nechť α, β jsou ordinály.
$\alpha + \beta =$ typ $\langle \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R \rangle$, kde R je definována předpisem :

$$\langle \zeta, 0 \rangle R \langle \eta, 1 \rangle \forall \zeta \in \alpha, \eta \in \beta$$
$$\zeta, \eta \in \alpha \Rightarrow \langle \zeta, 0 \rangle R \langle \eta, 0 \rangle \Leftrightarrow \zeta < \eta$$
$$\zeta, \eta \in \beta \Rightarrow \langle \zeta, 1 \rangle R \langle \eta, 1 \rangle \Leftrightarrow \zeta < \eta$$

Lemma 6. :
Pro libovolné ordinály α, β, γ platí :

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

(2) $\alpha + 0 = \alpha$

(3) $\alpha + 1 = S(\alpha)$

(4) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$

(5) Je-li β limitní ordinál, pak $\alpha + \beta = sup\{\alpha + \zeta : \zeta < \beta\}$

Poznámka.
Obecně neplatí komutativita sčítání, $\alpha+\beta \neq \beta+\alpha$. $1+\omega \neq \omega+1$. $\omega = 1+\omega$ - tady snadno uděláme bijekci, avšak nelze nelze udělat bijekci mezi $\omega+1$ a ω.

Definice.
Násobení ordinálů. Jsou-li α, β ordinály, pak $\alpha \cdot \beta =$ typ $\langle \beta \times \alpha, <_{LEX} \rangle$, kde $<_{LEX}\rangle$ (lexikografické uspořádání) je definováno předpisem :
Nechť $\langle \zeta_1, \eta_1 \rangle \in \beta \times \alpha$ a $\langle \zeta_2, \eta_2 \rangle \in \beta \times \alpha$, pak $\langle \zeta_1, \eta_1 \rangle <_{LEX} \langle \zeta_2, \eta_2 \rangle \Leftrightarrow \zeta_1 < \zeta_2 \vee (\zeta_1 = \zeta_2 \& \eta_1 < \eta_2)$

Lemma 7. :
Pro libovolné ordinály α, β, γ platí :

(1) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(2) $\alpha \cdot 0 = 0$

(3) $\alpha \cdot 1 = \alpha$

(4) $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

(5) Je-li β limitní ordinál, pak $\alpha \cdot \beta = sup\{\alpha \cdot \zeta : \zeta < \beta\}$

(6) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Poznámka.
Opět neplatí komutativita, tentokrát násobení.

Kapitola 4

Kardinály, spočetnost a nespočetnost

4.1 Kardinály

Definice.
Nechť a,b jsou množiny.

(1) Řekneme, že mohutnost množiny a je menší nebo rovna mohutnosti množiny b (a je subvalentní b), jestliže existuje prosté zobrazení $f : a \to b$, značíme $a \preccurlyeq b$.

(2) Řekneme, že mohutnost množiny a je rovna mohutnosti množiny b, jestliže existuje nějaká bijekce $g : a \to b$, značíme $a \approx b$.

(3) Řekneme, že mohutnost množiny a je ostře menší než mohutnost množiny v, (a je ostře subvalentní b), jestliže $a \preccurlyeq b \& \neg(a \approx b)$. Značíme $a \prec b$.

Lemma 7. :

(1) $x \approx x$

(2) $x \approx y \Rightarrow y \approx x$

(3) $(x \approx y \& y \approx z) \Rightarrow x \approx z$

(4) $x \preccurlyeq x$

(5) $(x \preccurlyeq y \& y \preccurlyeq z) \rightarrow x \preccurlyeq z$

Věta (Cantor-Bernstein) :
Pro množiny $a, b : (a \preccurlyeq b, \& b \preccurlyeq a) \Rightarrow a \approx b$.

Důkaz.
$\exists$ prosté zobrazení $f : a \rightarrow b$, $\exists$ prosté zobrazení $g : b \rightarrow a$, pokud f nebo g je surjekce, pak jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že $f(a) \neq b \& g(b \neq a$. Pro všechna přirozená čisla definujeme indukcí : $a_0 = a, b_0 = b$, $a_{n+1} = g''(b_n), b_{n+1} = f''(a_n)$.
Platí :

$$a_0 \supsetneqq a_1 \supsetneqq a_2 \supsetneqq a_3 \supsetneqq a_4 \supsetneqq a_5 \supsetneqq a_6 \ldots$$
$$b_0 \supsetneqq b_1 \supsetneqq b_2 \supsetneqq b_3 \supsetneqq b_4 \supsetneqq b_5 \supsetneqq b_6 \ldots$$

Definujeme

$$a_\omega = \cap\{a_n : n \in \omega\}$$
$$b_\omega = \cap\{b_n : n \in \omega\}$$

Definujeme zobrazení $h : a \rightarrow b$

$$h(x) = f(x) : x \in \cup a_{2n} \setminus \cup a_{2n+1} \cup a_\omega, n \in \mathbb{N}$$
$$h(x) = g^{-1}(x) : x \in \cup a_{2n+1} \setminus \cup a_{2n+2}, n \in \mathbb{N}$$

Dokážeme, že h je hledaná bijekce. h je funkce, neboť f je funkce a g je prostá funkce. h je prosté : $x \neq y \in a$

(a) pokud $x, y \in \cup a_{2n+1} \setminus \cup a_{2n+2}$ $h(x) = g^{-1}(x), h(y) = g^{-1}(y)$. Pak ale $h(x) \neq h(y)$, neboť g je funkce.

(b) pokud $x, y \in \cup a_{2n} \setminus \cup a_{2n+1} \cup a_\omega$, pak $h(x) \neq h(y)$, neboť f je prostá funkce.

(c) pokud $x \in \cup a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$, $y \in \cup a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega$, pak : $h(y) = f(y)$, $h(y) \in \cup b_{2n+1} \setminus b_{2n+2} \cup b_\omega$. $h(x) = g^{-1}(x) = t$. $a_{2n+1} = g''(b_{2n})$ a $a_{2n+2} = g''(b_{2n+1})$. $h(x) \in \cup b_{2n} \setminus \cup b_{2n+1}$. Tedy i $h(x) \neq h(y)$, neboť množiny ve kterých je $h(x), h(y)$ jsou disjunktní.

Zbývá dokázat, že h je surjekce :
$t \in b_{2n} \setminus b_{2n+1}$, $g(t) = x \in a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$, $h(x) = t$
$t \in b_{2n+1} \setminus b_{2n+2}$, $\exists x \in a_{2n} \setminus a_{2n+1}, t = f(x)$, $h(x) = t$.

$t \in b_\omega$. f je prosté, $f''(a) = b_1 \supsetneqq b_\omega$. Existuje nějaké x, že $f(x) = t$. Kdyby $x \in a_n \setminus a_{n+1}$, pak $f(x) = b_{n+1} \setminus b_{n+2}$, tedy $f(x) \notin b_\omega$, tedy $x \in a_\omega$. $h(x) = f(x) = t$.

Definice.
Buď A množina. Pokud na A existuje dobré uspořádání, buď |A| (mohutnost A) nejmenší ordinál α takový, že $A \approx \alpha$.

Definice.
Ordinál α se nazývá kardinál, je-li $\alpha = |\alpha|$. Ekvivalentně, ordinál α je kardinál, pokud pro všechna $\beta < \alpha$ je $\beta \prec \alpha$.

Poznámka.
ω je kardinál, je to nekonečný ordinál.

Lemma 8.
Je-li $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$ pro ordinály α, β, pak $|\alpha| = |\beta|$.

Důkaz.
Máme $\beta \subseteq \alpha$, máme bijekci $b : \alpha \to |\alpha|$. Po složení je $\beta \preccurlyeq |\alpha|$, tedy $|\beta| \leq |\alpha|$. $\alpha \approx |\alpha|$, $|\alpha| \subseteq \beta$, tedy $\exists$ prosté zobrazení $f : \alpha \to \beta$,$\alpha \preccurlyeq \beta, |\alpha| \leq |\beta|$. Tedy $|\alpha| = |\beta|$ podle Cantor-Bernsteinovy věty.

Lemma 9.

Je-li $n \in \omega$, pak :

(1) $\neg(n \approx n+1)$

(2) $(\forall \alpha)(\alpha \approx n \rightarrow \alpha = n)$

Důkaz.

(1) indukcí. $n = 0, 0 \not\approx 1$ - neexistuje bijekce $0 \rightarrow 1$. Předpoklad : $n \not\approx n+1$. Sporem. : $n+1 \not\approx n+2$. Nechť tedy existuje bijekce $b : n+1 \rightarrow n+2$. $n+1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Zvolme $k = b(n)$. Pro $i \in \mathbb{N}$ definujme : $b(i) < k : h(i) = b(i), b(i) \geq k : h(i) = b(i) - 1$. h je bijekce $n \rightarrow n+1$, což je spor s indukčním předpokladem.

(2) Je-li α ordinál, $\alpha \approx n$, máme ukázat $\alpha = n$. Kdyby $\alpha > n : n \leq n+1 \leq \alpha$. Pak $|\alpha| = n$. Dle lemmatu 8 : $|n| = |n+1|$, což je spor s (1).

Důsledek.
ω je kardinál a každé $n \in \omega$ je kardinál.

Definice.

- Množina A je konečná, pokud $|A| < \omega$.
- Množina A je spočetná, pokud $|A| \leq \omega$.
- Množina A je nespočetná, pokud není spočetná.

Pozor! Nespočetná množina neznamená nekonečně veliká, stačí, aby na ní neexistovalo dobré uspořádání.

4.2 Operace s kardinály

Definice.
Sčítání a násobení kardinálů. Jsou-li $\varkappa$ a λ kardinály, potom :

$$\varkappa \oplus \lambda = |\{0\} \times \varkappa \cup \{1\} \times \lambda|$$
$$\varkappa \otimes \lambda = |\varkappa \times \lambda|$$

Jde nám výhradně o bijekce, které nemusí ale nutně zachovávat dobré uspořádání, chceme pouze bijekce. Díky tomu můžeme psát :

$$\varkappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \varkappa$$
$$\varkappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \varkappa$$

Lemma I.
Nechť $m, n \in \omega$,

$$n \oplus m = n + m < \omega$$
$$n \otimes m = n \cdot m < \omega$$

Důkaz.
Stačí ukázat, že $n + m$, $n \cdot m$ jsou přirozená čísla, pak použít lemma 9.

$n \in \omega$. $n + 0 = n \in \omega$. Dále indukcí : předpoklad, že $n + m < \omega$. $n + S(m) = S(n + m) < \omega$, protože následník přirozeného čísla je zase přirozené číslo.

$n \in \omega$. $n \in \omega$. $n \cdot 0 = 0 \in \omega$. $n \cdot 1 = n \in \omega$. Dále indukcí : $n \cdot m \in \omega$. $n \cdot S(m) = n \cdot m + n < \omega$. Tyto dva sčítance jsou přirozená čísla a protože máme dokázaný součet, tak je to opět přirozené číslo.

Lemma II.
Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál.

Důkaz.
$\lambda \geq \omega$, λ je kardinál, ke sporu předpokládejme, že $\lambda = \xi + 1$, pro nějaký ordinál ξ. $\xi \geq \omega$, kdyby $\xi < \omega$, pak $\xi + 1 = \lambda$, což nejde.

$\lambda = \{0, 1, 2, \ldots \xi\}$. Definujme $f(\xi) = 0$ pro $n < \omega$, $f(n) = n + 1$, pro $\zeta < \xi$, $\omega \leq \zeta$, buď $f(\zeta) = \zeta$.

$f : \lambda \to \xi$ je prosté a surjektivní, tedy $\xi \approx \lambda$ - spor s tím, že λ je kardinál, tj. $|\lambda| \leq \xi < \lambda$.

Věta (Cantor).
Je-li ξ nekonečný kardinál, pak $\xi \otimes \xi = \xi$.

Důkaz.
Máme pro $\xi = \omega$ najít bijekci $b : \omega \times \omega \to \omega$. $b(n,k) = 2^n(2k+1) - 1$. b je bijekce.

Nechť $\xi > \omega$. Předpokládáme : je-li μ kardinál, $\omega \leq \mu < \xi$, pak $\mu \otimes \mu = \mu$. $\xi \otimes \xi$, uspořádáme tuto množinu pomocí maximo-lexikografického uspořádání: $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \gamma, \delta \rangle \in \xi \times \xi$. $\langle \alpha, \beta \rangle <_{MLEX} \langle \gamma, \delta \rangle$, jestliže $max\{\alpha, \beta\} < max\{\gamma, \delta\}$, nebo $max\{\alpha, \beta\} = max\{\gamma, \delta\} \& \alpha < \gamma$ nebo $max\{\alpha, \beta\} = max\{\gamma, \delta\} \& \alpha = \gamma \& \beta < \delta$.
$<_{MLEX}$ je dobré uspořádání množiny $\xi \times \xi$, typ $\langle \xi \times \xi, <_{MLEX} \rangle \leq \xi$. Sporem. Nechť typ $\langle \xi \times \xi, <_{MLEX} \rangle > \xi$. Pak existuje nějaké $\langle \alpha, \beta \rangle \in \xi \times \xi$, tak, že ξ je izomorfní s $\langle (\leftarrow, \langle \alpha, \beta \rangle), <_{MLEX} \rangle$. Položme nějaké $\zeta = max\{\alpha, \beta\}$, $\xi \leq$ typ $\langle (\leftarrow, \langle \zeta, \zeta \rangle), <_{MLEX} \rangle$. Tedy existuje prosté zobrazení $f : \xi \to (\zeta+1) \times (\zeta+1)$. $\zeta < \xi$, $\zeta+1 < \xi$, $\xi \leq |(\zeta+1) \times (\zeta+1)| \leq \mu \otimes \mu = \mu < \xi$, $|\zeta+1| = \mu < \xi$, #spor.

$<_{MLEX}$ je dobré uspořádání množiny $\xi \times \xi$, typ $\langle \xi \times \xi, <_{MLEX} \rangle \leq \xi$, $\xi \times \xi \preccurlyeq \xi$. Pro $\alpha \in \xi$ položme $f(\alpha) = \langle 0, \alpha \rangle$. f je prosté zobrazení $f : \xi \to \xi \times \xi$. $\xi \preccurlyeq \xi \times \xi$. Pak dle Cantor-Bernsteinovy věty : $\xi \approx \xi \times \xi$. Předpoklad : je-li $\omega \leq \mu < \xi$, pak $\mu \otimes \mu = \mu$. Kdyby existoval nějaký kardinál μ, pro který $\omega \leq \mu < \xi$ a $\mu \otimes \mu \neq \mu$, pak existuje μ_0 nejmenší takové. $\mu_0 \neq \mu$. Máme $\mu_0 > \omega$, pro $\forall \mu$ kardinály $\omega \leq \mu < \mu_0$. $\mu \otimes \mu = \mu$. Pak máme hotový důkaz, že $\mu_0 \otimes \mu_0 = \mu_0$.

Důsledek.
Jsou-li λ, ψ nekonečné kardinály, pak :

$$\lambda \oplus \psi = \psi \oplus \lambda = max\{\lambda, \psi\}$$

Důkaz.

Předpokládejme, že $max\{\lambda, \psi\} = \lambda$. $\lambda \preccurlyeq \lambda \oplus \psi$. Pak $\lambda \preccurlyeq \lambda \oplus \psi \preccurlyeq \lambda \otimes \psi \preccurlyeq \lambda \otimes \lambda = \lambda$. Dle Cantor-Bernsteinovy věty.

Dodatek k axiomu potence.
$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow x \subseteq a)$

Příklad.
$P(\{0,1,2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

Definice.
Potenční množina množiny a, $P(a) = \{x : x \subseteq a\}$.

Věta (Cantor).
Pro každou množinu a, $a \prec P(a)$.

Důkaz.

Máme ukázat, že $a \preccurlyeq P(a)$ a $\neg(a \approx P(a))$. Je-li $x \in a$, pak $\{x\} \subseteq a$. $f : a \to P(a)$, definujeme $f(x) = \{x\}$. f je prosté zobrazení (dvojice + extenzionalita) a tedy $a \preccurlyeq P(a)$. K důkazu, že $\neg(a \approx P(a))$, stačí ukázat, že neexistuje žádné surjektivní zobrazení $g : a \to P(a)$. Dokážeme sporem. Zvolme libovolně $g : a \to P(a)$, pro každé $x \in a$ je $g(x) \subseteq a$ a definujme množinu : $m = \{x \in a : x \notin g(x)\}$. Pro m platí : $m \subseteq a$, tedy $m \in P(a)$, přitom $m \notin rng(g)$, tedy g není surjekce na $P(a)$.
Zvol $t \in a$ libovolné.

a) $t \in g(t) \to t \notin m$, $m \neq g(t)$, $t \notin m$, $t \in g(t)$

b) $t \notin g(t) \to t \in m$, $m \neq g(t)$, $t \in m$, $t \notin g(t)$

Tomuto se říká Cantorův diagonální trik :
Matice, 0 - daný prvek není v a_i, 1 - prvek je v a_i, na diagonále prohodíme 0 a 1, tím se na každém řádku změní jedna hodnota. Dostaneme prvek, který není v matici.

Věta (Cantor).

$(\forall\alpha)(\alpha$ ordinál $\rightarrow (\exists\delta)(\delta$ je kardinál $\& \alpha < \delta))$

Důkaz.
Je-li $\alpha < \omega$, stačí položit $\delta = \omega$. Předpokládejme, že $\alpha \geq \omega$. Položíme $w = \{R \subseteq \alpha \times \alpha : \langle \alpha, R\rangle$ je dobře uspořádaná množina $\}$. w je množina : $\alpha \times \alpha$ je množina (z axiomu potence), $P(\alpha \times \alpha)$ je množina (z axiomu potence), w je z těchto dvou cosi vyděleno $\Rightarrow$ je to množina.

$t = \{$ typ $\langle \alpha, R\rangle : R \in w\}$. $\delta =$ typ $\langle \alpha, R\rangle$, $\psi(R, \delta$. t je množina ordinálů, tedy existuje nějaké $\gamma = sup(t) + 1$. $\gamma \notin t$, kdyby $\gamma \in t$, pak α lze dobře uspořádat podle typu γ, $\gamma \in t$, tedy $\gamma < \gamma$, což je #spor.

$\alpha \in t$, tedy $\alpha < \gamma$. $|\gamma|$ je kardinál, $\alpha < |\gamma|$. Kdyby ne, pak existuje bijekce $b : \gamma \rightarrow \alpha$ a tedy pro $\delta < \delta_1$, $\delta, \delta_1 \in \gamma$ definujme $f(\delta)Rf(\delta_1)$, R je dobré uspořádání α podle typu γ, #spor.

Definice.
Je-li α ordinál, kardinální následník ordinálu α je nejmenší kardinál větší než α. Značí se α^+.

Kapitola 5

Třídy a rekurze

5.1 Třídy

Definice.

Nechť φ je formule základního jazyka teorie množin, pak $\{x : \varphi(x)\}$ se nazývá třídou. x nemusí být množina, ale náš jazyk nám dovoluje mluvit pouze o množinách.

Neformálně : je-li φ formule základního jazyka teorie množin, pak každý soubor ve tvaru $\{x : \varphi(x)\}$ budeme nazývat třídou. Vlastní třída je třída, která není množinou.

Definice.

$V = \{x : x = x\}$ se nazývá univerzální třídou.

$O_n = \{x : x \text{ je ordinál }\}$ se nazývá třída všech ordinálů.

Formálně : Vlastní třídy neexistují a formule, ve kterých se vyskytují třídové termy, pouze považujeme za zkratky formulí zapsatelných v základním jazyce teorie množin. Například můžeme definovat operátor $\subseteq$:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow (\forall t)(t \in x \Rightarrow t \in y)$$

Třídové termy lze z formulí vždy eliminovat. Mějme φ, ψ dvě formule jazyka teorie množin. $x = \{x : \varphi(x)\}$, $y = \{x : \psi(x)\}$. $x = y$ je zkratka za $(\forall x)(\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$.

Příklady : nechť jsou $z, u, v \ldots$ proměnné pro množiny, definujeme následující zkratky :

$$
\begin{aligned}
&z \in x : \varphi(z)\\
&z = x : (\forall u)(u \in z \Leftrightarrow \varphi(u))\\
&x \in y : (\exists u)(u \in y \& (\forall t)(t \in u \Leftrightarrow \varphi(t))\\
&x \in y : (\exists u)(\psi(u) \& (\forall t)(t \in u \Leftrightarrow \varphi(t))\\
&x \cap y = \{x : \varphi(x) \& \psi(x)\}
\end{aligned}
$$

Věta (o tranzitivní indukci na třídě O_n).
Je-li $c \subseteq O_n$, $c \neq \varnothing$, pak existuje nějaké $\alpha \in c$ takové, že $(\forall\beta)(\beta \in c \Rightarrow (\alpha = \beta \vee \alpha < \beta))$. Je to vlastně celé schéma vět, pro každou formuli jedna. Například říká, že existuje nejmenší prvek v podmnožině ordinálů.

Důkaz.
$c \neq \varnothing$. Zvolme $\alpha \in c$. Pak kdykoliv $\beta < \alpha \Rightarrow \beta \notin c$. Existuje $\beta \in c \Rightarrow \beta < \alpha$. α je ordinál, tedy množina φ formule, $c = \{x : \varphi(x)\}$. $c = \{\beta : \beta \in \alpha \& \varphi(\beta)\}$. Podle věty o ordinálech existuje nejmenší prvek množiny c.

Typické použití.
φ formule, máme ověřit $(\forall\alpha)(\alpha \text{ ordinál} \Rightarrow \varphi(\alpha))$. Ověříme $\varphi(\varnothing)$. Ověříme platnost následující formule : $((\forall\beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha))$. Máme ukázat, že c je prázdná třída :

$c = \{\alpha : \neg\varphi(\alpha)\}$, což není (kdyby byla neprázdná, pak má nejmenší prvek, ale to nemůže být $\varnothing$ ani α).

5.2 Rekurze

Věta (o transfinitní rekurzi).
Je-li $f : V \to V$, pak existuje jediné $g : O_n \to V$ tak, že $(\forall\alpha) g(\alpha) = f(g \wedge \alpha)$ (g zúžené na alfa).

Důkaz.

Unicita : Nechť g_1, g_2 jsou dvě funkce, vyhovující tvrzení věty. $g_1(\emptyset) = f(g_1 \wedge \emptyset) = f(\emptyset) = f(g_2 \wedge \emptyset) = g_2(\emptyset)$. Dál transfinitní indukcí : předpokládejme, že α je ordinál a že platí pro všechna $\beta < \alpha : g_1(\beta) = g_2(\beta)$. $g_1 \wedge \alpha = \{\langle\emptyset, g_1(0)\rangle, \langle 1, g_1(1)\rangle, \ldots, \langle\beta, g_1(\beta)\rangle : \beta < \alpha\} = g_2 \wedge \alpha$. $g_1(\alpha) = f(g_1 \wedge \alpha) = f(g_2 \wedge \alpha) = g_2(\alpha)$.

Existence : Buď δ ordinál. Funkci $g : \delta \to V$ nazveme δ-aproximací, pokud platí : $(\forall\alpha)(\alpha \in \delta \Rightarrow g(\alpha) = f(g \wedge \alpha))$. Pro každé δ δ-aproximace existuje (nahrazení). Jsou-li δ_1, δ_2 ordinály, g je δ_1-aproximace, h je δ_2-aproximace, pak pro všechna $\alpha \in \delta_1 \cap \delta_2$ platí $g(\alpha) = h(\alpha)$. $g(\emptyset) = h(\emptyset)$. Zbývá definovat g : Je-li α ordinál, zvolme $\delta > \alpha$ a libovolně $p - \delta$-aproximaci. Položíme $g(\alpha) = p(\alpha)$. Na výběru δ-aproximace při definování $g(\alpha)$ nezáleží, g je dobře definované.

Definice.
Funkce $\chi_\alpha(\omega_\alpha) : (\chi, \omega)$ se definuje takto : $\chi_0 = \omega_0 = \omega$, $\chi_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$. Je-li navíc α limitní ordinál : $\chi_\alpha = \omega_\alpha = sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$.

Lemma 12.

(1) Každý ω_α je kardinál

(2) Každý nekonečný kardinál se rovná nějakému ω_α

(3) $\alpha < \beta \Rightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta$

(4) ω_α je kardinálním následníkem právě tehdy když α je ordinálním následníkem

Důkaz.

(1) $\omega_0 = \omega$ je kardinál, $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$ je kardinál podle definice kardinálního následníka. Nechť α je limitní. Pak $\omega_\alpha = sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$. Máme ověřit, že ω_β je kardinál. Sporem : předpokládejme, že $|\omega_\alpha| < \omega_\alpha$. Nechť $\gamma = |\omega_\alpha|$. γ je ordinál, $\gamma < \omega_\alpha$. $\omega_\alpha = sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$. Existuje β, že $\gamma < \omega_\beta < \omega_\alpha$ a $\beta + 1 < \alpha$. $\gamma < \omega_\beta < \omega_{\beta+1} < \omega_\alpha$. $\gamma \preccurlyeq \omega_\beta \preccurlyeq \omega_{\beta+1} = (\omega_\beta)^+ \preccurlyeq \omega_\alpha \approx \gamma$. Dle Cantor-Bernsteinovy věty $\omega_\beta \approx (\omega_\beta)^+$, což je #spor.

(2) Buď ξ nekonečný kardinál. Je-li $\xi = \omega$, pak $\xi = \omega_0$ a jsme hotovi. Nechť tedy $\xi > \omega_0$. $\{\alpha : \omega_\alpha < \xi\}$ je neprázdná množina ordinálů. Položíme $b = sup(\{\alpha : \omega_\alpha < \xi\})$. Rozlišíme dvě možnosti :

   a) Nechť $\beta \in \{\alpha : \omega_\alpha < \xi\}$, pak β je největší prvek té množiny. Máme $\omega_\beta < \xi$. Pak ale $\omega_{\beta+1} \geq \xi$, protože $\beta + 1 \notin \{\alpha, \dots\}$. $\xi \leq \omega_{\beta+1}$. Víme, že ξ je kardinál a $\xi > \omega_\beta$. Pak $\omega_{\beta+1} = (\omega_\beta)^+$ je nejmenší kardinál. $\omega_{\beta+1} \leq \xi \Rightarrow \omega_{\beta+1} = \xi$, dle Cantor-Bernsteinovy věty.

   b) Nechť $\beta \notin \{\alpha : \omega_\alpha < \xi\}$. Protože $b = sup(\{\alpha, \dots\})$ a $\beta \notin \{\alpha, \dots\}$, β je limitní ordinál. Pak $\xi = \omega_\beta : \xi > \omega_\alpha$, kdykoli pro všechna $\alpha < \beta$, $\omega_\beta = sup(\{\omega_\alpha : \alpha < \beta\}) \leq \xi$. Kdyby $\omega_\beta < \xi$, pak $\beta \in \{\alpha : \omega_\alpha < \xi\}$, což nejde, $\Rightarrow \omega_\beta = \xi$.

(3) $\alpha < \beta$, $\omega_\alpha < \omega_\beta$, přímo z definice plyne $\omega_\alpha \leq \omega_\beta$. $\alpha < \beta$, pak $\alpha + 1 \leq \beta$. $\omega_\alpha < (\omega_\alpha)^+ = \omega_{\alpha+1} \leq \omega_\beta$.

(4) ξ je kardinální následník $\Leftrightarrow \xi = \omega_{\alpha+1}$. „$\Leftarrow$“ : $(\omega_\alpha)^+ = \omega_{\alpha+1}$. „$\Rightarrow$“ : Nechť $\xi = \alpha^+$. Pak $\alpha \approx |\alpha| = \omega_\gamma$. $\alpha^+ = \omega_{\gamma+1} = \xi$.

Mocnění kardinálů.

Chtěli bychom umět ζ^λ. $2^3 = |\{f : f : 3 \to 2\}|$, tj. množina všech funkcí zobrazující z 3 do 2.

Kapitola 6

Axiom výběru

6.1 Axiom výběru

Definice.
Je-li a množina, pak množinu r nazveme rozkladem množiny a, jestliže platí: $\cup r = a \& (\forall u \in r)(u \neq \emptyset) \& (\forall u, v \in r)(u \neq v \Rightarrow u \cap v = \emptyset)$

Definice.
Množina $m \subseteq a$ se nazývá výběrovou množinou rozkladu r, jestliže platí : $(\forall u)(u \in r \Rightarrow (\exists t) u \cap m = \{t\})$

Princip výběru:
Pro každý rozklad neprázdné množiny existuje výběrová množina.

Definice:
Funkce f, definovaná na množině x, $rng(f) \subseteq \cup x$, která splňuje : $(\forall y)((y \in x \& y \neq \emptyset) \Rightarrow f(y) \in y)$ se nazývá selektor na množině x.

Axiom výběru:
Na každé neprázdné množině existuje selektor.

Definice:
Buď a množina, $\langle x_t : t \in a \rangle$ soubor množin. Kartézský součin $\pi_{t \in a} x_t = \chi x_t =$

$\{f$: f je funkce, $f : a \to \cup_{t\in a} x_t$, pro každé $t \in a$ je $f(t) \in x_t\}$.

Příklad.
$x \times y = \{\langle u, v\rangle : u \in x, v \in y\}$ - takto jsme to měli zavedené na začátku.
$\{0, 1\} = a, x_0 = x, x_1 = y$. $\{\{\langle 0, u\rangle, \langle 1, v\rangle\} : u \in x_0, v \in x_1\}$, existuje mezi tím bijekce

Lemma 13:
Následující tvrzení jsou ekvivalentní :

(a) axiom výběru

(b) princip výběru

(c) pro každou relaci S existuje funkce f taková, že $f \subseteq S$ a $dom(f) = dom(S)$

(d) je-li a neprázdná množina a je li pro každé $t \in a$ x_t neprázdná množina, pak $\chi_{t\in a} x_t \neq \emptyset$.

Důkaz.

(a)⇒(b) Buď r rozklad neprázdné množiny a. Podle (a) na množině r existuje selektor g. Nechť $m = rng(g)$. Je-li $y \in r$, pak protože g je selektor, je $g(y) \in y$. $y \cap rng(g) \supseteq \{g(y)\}$. Jsou-li $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in r$, pak $g(y_1) \in y_1, g(y_2) \in y_2$. Protože r je rozklad, $g(y_2) \notin y_1, y_1 \cap y_2 = \emptyset$. $y \cap m = \{g(y)\}$.

(b)⇒(c) $dom(S) = \{x : (\exists y)\langle x, y\rangle \in S\}$. Položíme pro $x \in dom(S) : a_x = \{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in S\}$. $r = \{a_x : x \in dom(S)\}$ je rozkladem množiny S. Podle (b), pro rozklad r existuje výběrová množina, f, $f \subseteq S$. f je funkce, protože pro každé $x \in dom(S) : f \cap a_x = \{\langle x, y\rangle\} = \{\langle x, f(x)\rangle\}$. $dom(f) = dom(S)$ podle (b).

(c)⇒(d) $a \neq \emptyset$, $x_t \neq \emptyset$ pro $t \in a$. $\chi_{t\in a} x_t = \{f, f$ je funkce, $dom(f) = a, f : a \to \cup\{x_t : t \in a\}$ a pro každé $t \in a$ je $f(t) \in x_t\}$. Definujme relaci $S \subseteq a \times \cup_{t\in a} x_t$ předpisem $\langle t, y\rangle \in S \Leftrightarrow y \in x_t$. Pro každé $t \in a$ je $x_t \neq \emptyset$. $dom(S) = a$. Dle (c) existuje funkce $\subseteq S, dom(f) = dom(s) = a$. $f \in \chi_{t\in a} x_t$, tedy $\chi_{t\in a} x_t \neq \emptyset$.

(d)⇒(a) Buď a množina, hledáme selektor na a. Můžeme předpokládat, že $a \neq \varnothing$ a že pro všechna $y \in a$ je $y \neq \varnothing$. $\chi_{y\in a} y$ podle (d) je $\chi_{y\in a} y \neq \varnothing$, je-li $f \in \chi_{y\in a} y$. $f : a \to \cup\{y : y \in a\}$ a pro každé $y \in a$ je $f(y) \in y$. f je selektor na a.

Spojitost funkcí.
Následující dvě věty jsou ekvivalentní :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, f je spojitá v bodě x, jestliže $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t)|t - x| < \delta \to |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

b) f je spojitá v bodě x, pokud platí : kdykoliv posloupnost $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ konverguje k bodu x, pak posloupnost $\langle f(x_n) : n \in \omega\rangle$ konverguje k bodu $f(x)$

Důkaz.

a) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 : |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$. Dále platí : $\exists n_0 : n \geq n_0 : |x_n - x| < \delta$

b) Sporem : $(\exists \varepsilon)(\forall \delta > 0)(\exists t)|t - x| < \delta, |f(t) - f(x)| \geq \varepsilon$. Ale $\langle t_n : n \in \omega\rangle \to x$, $|f(t_n) - f(x)| \geq \varepsilon$. $\{a_n : n \in \omega\} : a_n = \{t \in \mathbb{R} : |t - x| < \frac{1}{2^n} \& |f(t) - f(x)| \geq \varepsilon\} \neq \varnothing$. Aby to platilo, potřebujeme axiom výběru.

Tvrzení.
Buďte $a_n : n \in \omega$ spočetně nekonečné množiny, $a_n \cap a_m = \varnothing$ pro $n \neq m$. Pak $|\cup_{n\in\omega} a_n| = \omega$.

Důkaz.
Víme : $|\omega \times \omega| = \omega$. a_n je spočetná nekonečná, $a_n = \{x_{nk} : k \in \omega\}$. $a_n \cap a_m = \varnothing$, $\langle n_1, k_1\rangle \neq \langle n_2, k_2\rangle$, $x_{n_1k_1} \neq x_{n_2k_2}$. Máme tedy bijekce $\omega \times \omega \to \cup a_n$, $\langle n, k\rangle \to x_{nk}$. Existuje bijekce $b_n : \omega \to a_n$, na množinu $\langle b_n : n \in \omega\rangle$, což je výběrová množina množiny $\langle B_n : n \in \omega\rangle$.

Definice.
Mějme uspořádání $(a, \leq)$. Pak :

- Je-li $c \subseteq a$ taková, že $\langle c, <\rangle$ je lineárně uspořádaná množina, řekneme, že c je řetězec v a.

- Je-li $(a, \leq)$ uspořádaná množina, $m \subseteq a$, $x \in a$, řekneme, že x je horní mezí množiny m, jestliže platí $(\forall y)(y \in m \Rightarrow y \leq x)$.

Tvrzení.
Princip maximality (Zornovo-Kuratowského lemma). Je-li $(a, \leq)$ uspořádaná množina taková, že každý řetězec v a má horní mez, pak pro každé $x \in a$ existuje $y \in a$, že y je maximální prvek množiny a a $x \leq y$.

Tvrzení.
Princip dobrého uspořádání (existence dobrého uspořádání) : na každé množině a existuje relace R, že $\langle a, R\rangle$ je dobře uspořádaná množina.

Věta.
Následující tvrzení jsou ekvivalentní :

(a) Axiom výběru

(b) Princip dobrého uspořádání

(c) Princip maximality

Důkaz.

(a)⇒(b) a, hledáme dobré uspořádání. Je-li $a = \emptyset$, položíme $R = \emptyset$. Nadále nechť $a \neq \emptyset$. Podle (a) na $P(a)$ existuje selektor f. Najdeme ordinál γ a bijekci $g : \gamma \to a$. Pak definujeme $R : g(\alpha)Rg(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$, pro $\alpha, \beta \in \gamma$. $a \setminus \{g(\emptyset)\} \in P(a)$, $f(a \setminus \{g(\emptyset)\}) = g(1)$. Transfinitní rekurzí definujeme $g(\emptyset) = f(a)$, pokud je $a \setminus \{g(\alpha) : \alpha < \beta\} \neq \emptyset$. Pak $g(\beta) = f(a \setminus \{g(\alpha) : \alpha < \beta\})$. Musí existovat nějaké γ takové, že $\forall \beta < \gamma : g(\beta)$ je definovaná a $\{g(\beta) : \beta \in \gamma\} = a$.

(b)⇒(c) Vezmu prvek, podívám se, jestli je maximální, hledám prvky větší, než je on. Pokud najdu, nový potenciální maximální prvek. Takto postupuji, dokud nenarazím na prvek, pro který už větší nenajdu a ten bude maximální prvek. $(a, \leq)$, $x \in a$. Podle (b) na a existuje dobré uspořádání S. Je-li $c \subseteq a$ řetězec, řekneme, že c splňuje Podmínku, pokud platí : $x \in c \& x$ je nejmenší prvek v uspořádání $\leq$ řetězce c pro každé $y \in c, y > x$ je y S-nejmenší prvek množiny $\{t : t$ je horní mezí $\{z : z \in c, x \leq z, z < y\}\}$. (konec Podmínky). Množina řetězců splňujících Podmínku je neprázdná, neboť $c = \{x\}$ do ní patří.

Označme $l = \cup\{c \leq a : c$ je řetězec splňující Podmínku $\}$, l je lineárně uspořádaná pomocí $\leq$: Sporem: Nechť existují $y_1, y_2 \in l$, není pravda ani $y_1 < y_2$, ani $y_2 < y_1$, ani $y_1 = y_2$ (neporovnatelné v $\leq$). Máme $y_1 > x, y_2 > x$. Množina $a = \{y \in l : (\exists z \in l) y, z$ jsou $\leq$ neporovnatelné $\} \neq \emptyset$, neboť obsahuje y_1. Existuje S-nejmenší prvek množiny a, označme ho γ. Množina $e = \{y \in l : \gamma$ a y jsou neporovnatelné v $\leq\}$ je neprázdná, tedy existuje S-nejmenší prvek množiny e, označme ho q. $x, t : \{t \in l : x \leq t < \gamma\}$ je lineárně uspořádaná pomocí $\leq$. Protože l je sjednocení všech řetězců splňující Podmínku, existuje c_1 řetězec splňující Podmínku, že $\gamma \in c_1$, existuje c_2 řetězec splňující podmínku, že $q \in c_2$. Protože c_2 splňuje Podmínku, máme q je S-nejmenší prvek $\{t : t$ je horní mez $\{z \in c_2 : x \leq z < q\}\}$. Kdyby γ byl horní mezí $\{z \in c_2 : x \leq z < q\}$, pak $\gamma S q$, q je větší než γ, protože jsme nejdřív vzali γ a k němu hledali neporovnatelný prvek. Pak může být :

(a) $\exists z \in \{z \in c_2 : x \leq z < q\}$, $\gamma \leq z$ a tedy $\gamma < q$, což je #spor, neboť γ, q jsou neporovnatelné.

(b) $\exists z \in \{z \in c_2 : x \leq z < q\}$, z je neporovnatelné s γ, protože zSq, máme #spor s volnou q.

a tedy l je lineárně uspořádáno pomocí $\leq$. Množina l splňuje podmínku. V $(a, \leq)$ má l horní mez y, y je hledaný maximální prvek (kdyby ne, pak existuje nějaké $t \in a, t > y$ a $\{t : \forall z \in l : z < t\} \neq \emptyset$). Má tedy S-první prvek t_0, $l \cup \{t_0\}$ splňuje Podmínku, $t_0 \notin l$. Nebo $l = \cup\{c : c$ splňuje Podmínku $\}$. Obojí je #spor.

(c)⇒(a) m, hledáme selektor. Buď $g : l \to U_m$ taková, že $l \subseteq m$, pro každé $x \in l, x \neq \emptyset, g(x) \in x$ (nevíme, jestli definičním oborem g je celé m, chceme, aby $m = l$). Takové g nazveme částečným selektorem na m. Buď $a = \{g : g$ je částečným selektor na $m\}$. Uspořádejme $(a, \leq)$. Chceme použít princip maximality. Nechť $c \subseteq a$ je libovolný řetězec. Položme $h = \cup c$. h je horní mezí c ??? Je-li $g \in c$, pak $g \subseteq h$. Musíme ukázat, že $h \in a$, neboli h je částečný selektor. h je relace : $dom(h) = \cup_{g \in c} dom(g) \subseteq m$. h je funkce : $x \in h, y_1, y_2 \in \cup_m, \langle x, y_1\rangle \in h, \langle x, y_2\rangle \in h$. Protože $h = \cup_c$, existuje $g_1 \in c : \langle x, y_1\rangle \in g_1$ a existuje $g_2 \in c : \langle x, y_2\rangle \in g_2$. c je řetězec : Buď platí $g_1 \subseteq g_2$, nebo $g_1 \supseteq g_2$. $\langle x, y_1\rangle \in g_2, \langle x, y_2\rangle \in g_2$ a g_2 je funkce : $y_1 = y_2$. h je částečný selektor : $g = \langle x, y\rangle \in h, y \in x$. Podle principu maximality existuje f, maximální prvek množiny a, f

je částečný selektor. $dom(f) = m \setminus \{\varnothing\}$. Kdyby ne : existuje $x \in m, x \neq \varnothing, x \notin dom(f)$. Protože $x \neq \varnothing$, existuje $y \in x : f \cup \{\langle x, y\rangle\}$ je opět částečný selektor. Přitom $f \subsetneqq f \cup \{\langle x, y\rangle\}$, #spor s maximalitou $f \Rightarrow dom(f) = m \setminus \{\varnothing\}$. Tedy f je hledaný selektor.

6.2 Důsledky axiomu výběru

Nechť platí axiom výběru. Pak

(a) Pro každou $m, |m|$ existuje, plyne to přímo z axiomu výběru.

(b) Pro množiny m, n platí buď $m \preccurlyeq n$ nebo $n \preccurlyeq m$.

(c) m, n, předpokládejme, že existuje surjektivní zobrazení $f : m \to n$. Pak $m \succcurlyeq n$.

Důkaz. Mějme surjekci $f : m \to n$. Je-li $x \in n, f(x) \neq \varnothing, f(x) \subseteq m$, $r = \{f(x) : x \in m\}$. Rozklad množiny m. Podle principu výběru : máme z výběrovou množinu rozkladu r. $g = \{\langle x, y\rangle : x \in n \& z \cap f(x) = \{y\}\}$. $g : n \to m$ je prostá funkce, tedy $n \preccurlyeq m$.

(d) Pro každou nekonečnou množinu A je $A \approx A \times A \approx A \times \{0, 1\}$.
Důkaz. $|A| = \xi$. $\xi \geq \omega$. $\xi = \xi \otimes \xi = \xi \otimes 2$. Zbytek důkazu byl udělán dříve.

(e) Každou nekonečnou množinu lze rozložit na nekonečně mnoho nekonečných částí.
Důkaz. Existuje $A \to A \times A$ bijekce. Položme pro $a \in A : k_a = b^{-1}{''}\{a\} \times A$.

(f) Je-li ζ nekonečný kardinál, $|a| = \zeta$, pro každé $x \in a$ je $|x| = \zeta$. Pak $|\cup a| = \zeta$.

Stále předpokládáme axiom potence! :

Značení.
Jsou-li a, b množiny, ${}^a b = \{f : f$ je funkce, $f : a \to b\}$.

Definice.
Jsou-li ξ, ζ kardinály, $\xi^\zeta = |{}^\zeta\xi|$.
Lemma 14.
Jsou-li ξ, ζ kardinály, $2 \leq \xi < \zeta$, $\omega \leq \zeta$. Pak $\xi^\zeta = 2^\zeta = |P(\zeta)|$.
Důkaz.
$2^\zeta = |\{f : f$ je funkce, $f : \zeta \to \{0,1\}\}|$. Definujeme zobrazení $\theta : {}^\zeta 2 \to P(\zeta)$. Pro $f \in {}^\zeta 2$ je $\theta(f) = \{\alpha \in \zeta : f(\alpha) = 1\}$. θ je bijekce. $2^\zeta \approx P(\zeta)$.
${}^\lambda 2 \preccurlyeq {}^\lambda\xi \preccurlyeq {}^\lambda\lambda \preccurlyeq P(\lambda \times \lambda) \preccurlyeq P(\lambda)$. Identita : ${}^\lambda\xi \to {}^\lambda\lambda$. $f \in {}^\lambda\lambda \to f \subseteq \lambda \times \lambda$
$\lambda \times \lambda \approx \lambda$. Proto $\xi^\lambda = \lambda^\lambda$.

Lemma 15.
Jsou-li A, B, C množiny, $B \cap C = \varnothing$, pak :

- ${}^B A \times {}^C A \approx {}^{(B \cup C)} A$
- ${}^C({}^B A) \approx {}^{(C \times B)} A$

Jsou-li ξ, ζ, μ kardinály, pak

- $\xi^\zeta \otimes \xi^\mu = \xi^{\zeta \oplus \mu}$
- $\xi^{\zeta^\mu} = \xi^{\zeta \otimes \mu}$

Důkaz.
První věta. $f \in {}^B A$, $g \in {}^C A$. $\langle f, g\rangle \in {}^B A \times {}^C A$. $\theta(\langle f, g\rangle) = f \cup g$. θ je bijekce.
Druhá věta. $f : C \to {}^B A$. Pro každé $c \in C$ je $f(c)$ funkce, $f(c) : B \to A$. Pro každé $b \in B$ $f(c)(b) \in A$. $\psi : {}^C({}^B A) \to {}^{C \times B} A$ předpisem $\psi(f) = g$. g takové, že pro každé $\langle c, b\rangle \in C \times B$, $g(\langle c, b\rangle) = f(c)(b)$.

Definice.
Buďte α, β ordinály, $f : \beta \to \alpha$. Řekneme, že f zobrazuje β do α kofinálně, jestliže pro každé $\gamma \in \alpha \exists \delta \in \beta$ tak, že $\gamma \leq f(\delta)$.

Definice.
Kofinalitou ordinálu β, $cf(\beta)$, nazveme nejmenší ordinál α takový, že existuje kofinální zobrazení z α do β.
Lemma 16.

(a) Pro každý ordinál β, $cf(\beta) \leq \beta$

(b) Pro každá ordinál β existuje ostře rostoucí zobrazení $f : cf(\beta) \to \beta$, které je kofinální

Důkaz.

(a) $\mathrm{id} : \beta \to \beta$, je kofinální zobrazení, tedy $cf(\beta) \leq \beta$.

(b) Označme $\alpha = cf(\beta)$, existuje kofinální zobrazení $g : \alpha \to \beta$. Definujme zobrazení f rekurzí : $f(\varnothing) = g(\varnothing)$. Pro $\gamma < \alpha$, $\{g(\xi) : \xi < \gamma\}$ je skoro omezená v β, neboť $\gamma \leq cf(\beta)$. Tedy existuje $f(\gamma) < \beta$ tak, že $\forall \xi < \gamma, g(\xi) < f(\gamma)$. f je ostře rostoucí. Přitom platí $\forall \gamma \in \alpha, f(\gamma) > g(\gamma)$. g je kofinální, tedy f je kofinální.

Lemma 17.
Je-li α limitní ordinál, $f : \alpha \to \beta$ ostře rostoucí kofinální zobrazení. Pak $cf(\alpha) = cf(\beta)$.

Důkaz.
$cf(\alpha)$ existuje kofinální $g : cf(\alpha) \to \alpha$. $f \circ g : cf(\alpha) \to \beta$ je kofinální. Je-li $\xi < \beta$, existuje $\gamma \in \alpha : f(\gamma) \geq \xi$, protože f je kofinální a α limitní, $\gamma \in \alpha$, g je kofinální, $\exists \delta \in cf(\alpha) : g(\delta) \geq \gamma$. $f(g(\delta)) \geq f(\gamma) \geq \xi$, f je ostře rostoucí, $f \circ g$ je kofinální zobrazení z $cf(\alpha)$ do β. Tedy $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$.

Dle předchozího lemmatu 16, $\exists h : cf(\beta) \to \beta$ ostře rostoucí kofinální zobrazení. Definujme zobrazení $g : cf(\beta) \to \alpha$ takto: $g(\xi) = min\{\gamma : f(\gamma) \geq h(\xi)\}$. g je zřejmě kofinální zobrazení z $cf(\beta) \to \alpha$. Z definice $cf(\alpha) \leq cf(\beta)$. Z toho plyne $cf(\alpha) = cf(\beta)$.

Důsledek.
Pro každý ordinál β, $cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$.

Definice.
Řekneme, že ordinál β je regulární, pokud β je limitní ordinál a $\beta = cf(\beta)$.

Lemma 18.
Je-li ordinál β regulární, pak β je nekonečný kardinál.

Důkaz.
Protože β je regulární, $\beta \geq \omega$. Sporem: Nechť $|\beta| < \beta$, pak tedy $\omega \leq |\beta|$.

Existuje $b : |\beta| \to \beta$, b je bijekce, proto b je kofinální zobrazení, tedy $cf(\beta) \leq |\beta| < \beta$, #spor.

Lemma 19.
ω je regulární kardinál.

Lemma 20.
Pokud platí axiom výběru, a je-li ζ kardinál, pak ζ^+ je regulární kardinál.

Důkaz.
Sporem. Nechť $cf(\zeta^+) < \zeta^+$. $\exists \alpha < \zeta^+, \exists f : \alpha \to \zeta^+$, f je ostře rostoucí kofinální zobrazení $\zeta^+ = \cup\{f(\xi) : \xi < \alpha\}$. $|\alpha| \leq \alpha < \zeta^+ \Rightarrow |\alpha| \leq \zeta$. Pro $\xi \in \alpha : f(\xi) < \zeta^+$, tedy $|f(\xi)| \leq \zeta$. Pak ale $|\cup\{f(\xi) : \xi < \alpha\}| \leq \zeta \cdot \zeta = \zeta$.
Lemma 21.
Je-li α limitní ordinál, pak $cf(\alpha) = cf(\omega_\alpha)$.

Věta (Königovo lemma).
Nechť platí axiom výběru. Je-li ξ nekonečný kardinál, $\lambda \geq cf(\xi)$, pak $\xi^\lambda > \xi$.

Důkaz.
$\lambda \geq cf(\xi)$. $\xi^\lambda \geq \xi^{cf(\xi)}$. Stačí ukázat, že $\xi^{cf(\xi)} > \xi$. Stačí ověřit, že $\xi^{cf(\xi)} \neq \xi$. Zvolme libovolně nějaké zobrazení $g : \xi \to {}^{cf(\xi)}\xi$. Stačí ukázat, že g není surjektivní.

Zvolme a zafixujeme nějaké kofinální ostře rostoucí zobrazení h z $cf(\xi) \to \xi$. Je-li $\zeta \in cf(\xi)$, pak $|\{g(\alpha) : \alpha \in \xi \& \alpha < h(\zeta)\}| < \xi$. Definujme $f(\zeta) = min\{\mu \in \xi \setminus \{g(\alpha)(\zeta : \alpha \in \xi \& \alpha < h(\zeta))\}\}$. Pro funkci $f : cf(\xi) \to \xi$ platí, že $f \notin rng(g)$. Kdyby $f = g(\alpha)$ pro nějaké $\alpha \in \xi$, zvolme $\zeta \in cf(\xi)$ tak velké, aby $h(\zeta) > \alpha$. Pak $f(\zeta) \neq g(\alpha)(\zeta)$ a hotovo.

Důsledek.
Axiom výběru. Je-li λ kardinál, $\lambda \geq \omega$, pak $cf(2^\lambda) > \lambda$.

Důkaz.
Položme $\xi = 2^\lambda$. $\xi^\lambda = 2^{\lambda^\lambda} = 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda = \xi$.
Kdyby platilo $cf(2^\lambda) \leq \lambda$, podle Königova lemmatu dostaneme $\xi^\lambda > \xi$, #spor.

Definice.

1. CH Hypotéza kontinua je tvrzení „$2^\omega = \omega_1$“ (první nespočetný kardinál). Toto trzení nikdo nedokáže ani nevyvrátí.
2. GCH Zobecněná hypotéza kontinua je tvrzení $(\forall\alpha)2^{\chi_\alpha} = \chi_{\alpha+1}$. Opět nedokazatelné i nevyvratitelné tvrzení.

Lemma 23.
(Axiom výběru+GCH). Nechť $\xi, \lambda \geq 2$ jsou kardinály, alespoň jeden z nich nekonečný. Pak platí :

(a) $\lambda < cf(\xi) \Rightarrow \xi^\lambda = \xi$

(b) $cf(\xi) \leq \lambda \leq \xi \Rightarrow \xi^\lambda = 2^\xi$

(c) $\xi \leq \lambda \Rightarrow \xi^\lambda = 2^\lambda$

Důkaz.

(a) $\lambda = 1 \Rightarrow \xi^1 = \xi$. Dále $\xi^\lambda = |{}^\lambda\xi|$. Protože $\lambda < cf(\xi)$, neexistuje kofinální zobrazení $f : \lambda \to \xi$. Tedy pro každou $f : \lambda \to \xi$ existuje nějaké $\alpha < \xi$ tak, že $f \subseteq \lambda \times \alpha$. ${}^\lambda\xi = \cup\{\,{}^\lambda\alpha : \alpha < \xi\}$. $\lambda < \xi, \alpha < \xi$. Můžeme pak psát $|{}^\lambda\alpha| \leq |max\{\alpha,\lambda\}|^{|max\{\alpha,\lambda\}|} = 2^{|max\{\alpha,\lambda\}|} \leq \xi$. Jelikož $|max\{\alpha,\lambda\}| < \xi$. Podle GCH $2^{|max\{\alpha,\lambda\}|} = |max\{\alpha,\lambda\}|^+$. Pak $|{}^\lambda\xi| = |\cup\{{}^\lambda\alpha : \alpha < \xi\}| \leq \xi \otimes \xi = \xi$.

(b) $cf(\xi) \leq \lambda \leq \xi \Rightarrow \xi^\lambda = 2^\xi$. $\xi < \xi^{cf(\xi)} \leq \xi^\lambda \leq \xi^\xi = 2^\xi = \xi^+$. $2^\omega < \chi_\omega$: $\chi_\omega < (\chi_\omega)^{\chi_0} < \chi_{\omega_4}$ (odhad).

(c) Bylo dokázáno.

Definice.
Nechť platí AC. Buď $I \neq \varnothing$. Pro každé $i \in I$ buď ξ_i kardinální číslo. Definujme:

(a) $\displaystyle\sum_{i\in I} \xi_i = |\cup\{\xi_i \times \{i\} : i \in I\}|$

(b) $\displaystyle\prod_{i\in I} \xi_i = |\chi_{i\in I}\xi_i|$

Věta (Königova nerovnost).
Buď $I \neq \varnothing$ a nechť pro každé $i \in I, \xi_i, \zeta_i$ jsou kardinály, $\xi_i > \zeta_i$.
Pak $\sum_{i \in I} \zeta_i < \prod_{i \in I} \xi_i$.

Důkaz.
Pro $i \in I, \alpha \in \zeta_i, \langle \alpha, i \rangle \in \cup\{\dots\}$. Položme $f(\langle \alpha, i \rangle)(j) = \varnothing($ pro $j \neq i, f \dots = \alpha + 1$ pro $j = i$. Definice je korektní, protože $\xi_i > \zeta_i$. f je prosté zobrazení, $\{\zeta_i \times \{i\} : i \in I\} \to \chi_{i \in I} \xi_i$. Pak $\sum_{i \in I} \zeta_i \leq \prod_{i \in I} \xi_i$

Musíme ukázat, že neexistuje žádné zobrazení $g : \cup\{\zeta_i \times \{i\} : i \in I\} \to \chi_{i \in I} \xi_i$, které by bylo surjektivní. Zvolme g libovolné. Najdeme $h \in \chi_{i \in I} \zeta_i \setminus rng(g)$ následujícím způsobem : $g(\langle \alpha, i \rangle) \in \chi_{\xi_i}$. $g(\langle \alpha, i \rangle)(i) \in \xi_i > \zeta_i$. Definujme $h(i) = min\{\xi_i \setminus \{g(\langle \alpha, i \rangle)(i) : \alpha \in \zeta_i\}\}$. h je hledaná funkce. Pokud $h = g(\langle \alpha, i \rangle)$, pak $h(i) \neq g(\langle \alpha, i \rangle)(i)$, což je #spor, není to možné.

Věta (Hausdorffova formule).
Nechť platí AC. Pak kdykoli jsou γ, δ nekonečné kardinály, pak $(\gamma^+)^\delta = \gamma^\delta \otimes \gamma^+$.

Důkaz.
$\gamma^+ > \gamma$, $(\gamma^+)^\delta \geq \gamma^\delta$. Protože $\delta \neq \varnothing$ je $(\gamma^+)^\delta \geq \gamma^+$. $(\gamma^+)^\delta \geq \gamma^\delta \otimes \gamma^+$. Případy:

- $\delta \geq \gamma^+$, pak $(\gamma^+)^\delta = 2^\delta, \gamma^\delta = 2^\delta, \gamma^+ \leq 2^\delta$. $(\gamma^+)^\delta \leq \gamma^\delta \otimes \gamma^+$.
- $\delta < \gamma^+$, pak $\delta \leq \gamma$. $|^\delta(\gamma^+)|$, γ^+ je regulární kardinál, $\delta < \gamma^+$, tedy je-li $f : \delta \to \gamma^+$, f není kofinální. ${}^\delta(\gamma^+) = \cup\{{}^\delta\alpha : \alpha < \gamma^+\}$. $(\gamma^+)^\delta \leq \gamma^\delta \otimes \gamma^+$.

Kapitola 7

Nekonečná kombinatorika

7.1 Princip kompaktnosti

Speciální případ :
Zvolíme-li pro každé $n \in \omega : g_n =: n \to 2$, pak existuje $f : \omega \to 2$ tak, že pro každé $n \in \omega \exists k \geq n : f \wedge n = g_k \wedge n$.

Definice.
Mějme neprázdnou množinu indexů I. Mějme soubor množin $\langle A_i : i \in I \rangle = A$. Částečný selektor souboru A je funkce f taková, že $dom(f) \subseteq I$, pro každé $i \in dom(f)$ je $f(i) \in A_i$.

Je-li S množina částečných selektorů souboru A, řekneme, že množina S pokrývá konečné množiny, jestliže pro každou konečnou $K \subseteq I$ existuje $f \in S$, že $K \subseteq dom(f)$.

Nechť $g : I \to \cup A_i, i \in I$. Řekneme, že g je filtrované prodloužení souboru S, je-li g částečný selektor, $dom(g) = I$ a platí : Kdykoli $K \subseteq I$ je konečná množina, pak existuje $f \in S$, pro kterou $f \wedge K = g \wedge K$.

Věta (Princip kompaktnosti).
Je-li $I \neq \emptyset$, $A = \langle A_i : i \in I \rangle$ soubor konečných neprázdných množin, pak každý systém částečných selektorů, který pokrývá konečné množiny, má filtrované prodloužení.
Meze věty :

- Nechť $I = \omega$, pro $n \in I$, $A_n = \omega$. f_n je konstantní funkce s hodnotou n, a definičním oborem $n + 1$. $S = \{f_n, n \in \omega\}$. Pro toto S neexistje filtrované prodloužení - A_i musí být konečná.

- f je filtrované prodloužení S, $K \subseteq I$, K konečná. Existuje $g \in S$, že $f \wedge K = g \wedge K$.

- Tvrzení (Radó) : $(L, <)$ buď lineárně uspořádaná množina, γ soubor nedegenerovaných intervalů na L. Předpokládejme, že existuje $k \in \omega$ tak, že $(\forall x \in L)|\{J \in \gamma : x \in J\}| \leq k$. Pak $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k$, že každé γ_i je systém disjunktních intervalů.

Tvrzení.
$A = \langle A_i : i \in I \rangle, I \neq \emptyset$, všechny A_i konečné, S - soubor částečných selektorů pokrývající všechny konečné podmnožiny množiny I. Pak existuje filtrované prodloužení systému S.

Důkaz.
Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každou $f \in S$ je $dom(f)$ konečná množina. Kdyby ne, tak nahradíme S souborem $\{f \wedge K : f \in S, K \subseteq dom(f), K$ konečná $\})$.
Uvažujme následující množinu : $\Omega = \{g : g$ je částečný selektor systému A, pro který platí $(\forall K \subseteq dom(g))$, K konečné, pak $\{f \in S : f \wedge K = g \wedge K\}$ pokrývá konečné podmnožiny množiny $I\}$. Uspořádejme $(\Omega, \subseteq)$. Chceme aplikovat princip maximality : Buď $L \subseteq \Omega$ řetězec (tedy L je soubor částečných selektorů uspořádaný inkluzí). Položíme $\tilde{g} = \cup L$:
Evidetně pro každé $g \in L$ je $\tilde{g} \supseteq g$. $\tilde{g}$ je funkce : Je-li $i \in L, \langle i, x \rangle, \langle i, y \rangle \in \tilde{g}$. Musí existovat $g_1 \in L : \langle i, x \rangle \in g_1$ a $g_2 \in L : \langle i, y \rangle \in g_2$. L je lineárně uspořádané, buď $g_1 \subseteq g_2$, nebo $g_2 \subseteq g_1$. V obou případech, protože g_1, g_2 jsou funkce, $x = y$, $\tilde{g}$ je částečný selektor.
Zbývá dokázat $K \subseteq dom(\tilde{g})$. Buď $K \subseteq dom(\tilde{g})$ konečná množina, $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Existují funkce $g_1, \ldots, g_n \in L, i_1 \in dom(g_1), \ldots, i_n \in dom(g_n)$. L je lineárně uspořádaná, tedy existuje $j \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $g_j \supseteq g_k$ pro $k \in \{1, \ldots, n\}$. $dom(g_j) \supseteq K$. Protože $g_j \in \Omega$, $\{f \in S : f \wedge K = g_j \wedge K\}$ pokrývá všechny konečné podmnožiny množiny I. $\tilde{g} \in \Omega$. Podle principu maximality, v $(\Omega, \subseteq)$ existuje maximální prvek h. Zbývá dokázat, že h j hledané filtrované prodloužení souboru S: Je-li K konečná, $K \subseteq dom(h)$, pak existuje $f \in S$ tak, že $f \wedge K = h \wedge K$. Jediné, co zbývá ověřit je, že $dom(h) = I$. Nyní použijeme skutečnost, že všechny ty množiny jsou konečné.

Sporem : $i \in I \notin dom(h) : A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, a je to konečná množina. Uvažujme funkce

$$\begin{aligned} h_1 &= h \cup \{\langle i, a_1 \rangle\} \\ h_2 &= h \cup \{\langle i, a_2 \rangle\} \\ h_3 &= h \cup \{\langle i, a_3 \rangle\} \\ &\vdots \\ h_r &= h \cup \{\langle i, a_r \rangle\} \end{aligned}$$

Kdyby některá z funkcí $h_1, h_2, \dots, h_r$ byla prvkem Ω, máme spor s maximalitou funkce h, neboť $h_j \supsetneqq h$. Pro $j = 1, 2, \dots, r$ existuje konečná množina $K_j \subseteq dom(h_i)$ tak, že $\{f \in S : f \wedge K_j = h_j \wedge K_j\}$ nepokrývá všechny konečné podmnožiny I. Tedy existuje konečná množina $M_j \subseteq I$ tak, že kdykoli je $f \wedge K_j = h_j \wedge K_j$, pak $M_j \setminus dom(f) \neq \varnothing$. Kdyby $i \notin K_j$, $K_j \subseteq dom(h)$, $h \in \Omega$ - to nejde, pro všechna $j = 1, 2, \dots, r$,$i \in K_j$. Buď $K \cup_{j=1}^{r} M_j \setminus \{i\}$ konečná, $k \subseteq dom(h)$. Položíme $M = \cup_{j=1}^{r} M_j \cup \{i\}$. $K \subseteq dom(h)$.
$h \in \Omega, \{f \in S : f \wedge K = h \wedge K\}$ pokrývá všechny konečné podmnožiny množiny I. Musí tedy existovat $f \in S : f \wedge K = h \wedge K$, $dom(f) \supseteq M$, $a_j = f(i)$, $m \subseteq dom(f), M \supseteq M_j$. Tato f $f \wedge K = h_j \wedge K_j$. $dom(f) \supseteq M_j$, což je #spor.

Lemma o 3 množinách.
Buď $M \neq \varnothing$, buď $f : M \to M$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \neq x$, tj. nemá žádné pevné body. Pak existují množiny M_0, M_1, M_2, že $M_0 \cup M_1 \cup M_2 = M$, pro $i \neq j$ je $M_i \cap M_j = \varnothing$, pro každé $i \in \{0, 1, 2\}$ platí $f[M_i] \cap M_i = \varnothing$.

Důkaz.
Pro $I = M$, pro $i \in M$ buď $A_x = \{0, 1, 2\}$. $S = \{g : dom(g) \subseteq M, g(x) \in \{0, 1, 2\}$ pro všechna $\{x, f(x)\} \subseteq dom(g)$, $g(x) \neq g(f(x))\}$. Máme ukázat, že S pokrývá konečné podmnožiny množiny M. Indukcí podle mohutnosti :

1. $K \subseteq M, |K| \in \{1, 2\}$ - triviální
2. Buď $K \subseteq M, |K| = n + 1$. Víme, že existuje částečný selektor, který pokrývá K o mohutnosti n.
   (a) $K \setminus f[K] \neq \varnothing$. Zvolme $x \in K \setminus f[K] \neq \varnothing$. $|K \setminus \{x\}| = n$. Podle indukčního předpokladu existuje nějaké $y \in S$, $dom(g) = K \setminus \{x\}$.

Pokud $f(x) \notin K$, definujme $\tilde{g} \supseteq g : \tilde{g}(x) \in \{0,1,2\}$ libovolně. Pokud $f(x) \in K$: definujme $g(x) \in \{0,1,2\} \setminus \{g(f(x))\}$.

(b) $K \subseteq f[K]$. Protože K je konečná, $K = f[K]$. Protože K je konečná a $f[K] = K$, zobrazení $f \wedge K$ musí být prosté. Zvolme libovolné $x \in K$. Dle indukčního předpokladu $g : K \setminus \{x\} \to \{0,1,2\}$, $g \in S$.

Existuje jediné $y \in K, f(y) = x$. Existuje jediné $z \in K, z = f(x)$. $\tilde{g} \supseteq g, \tilde{g}(x) \in \{0,1,2\}$, různé od $g(y), g(z)$. Nechť $G : M \to \{0,1,2\}$ je filtrované prodloužení souboru S. Položme $M_i = G^{-1}(i)$. $M_0 \cup M_1 \cup M_2 = M$, protože $dom(G) = M$. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, protože G je fuinkce. Je-li $x \in M_i, K = \{x, f(x)\}$ je konečná a tedy existuje $g \in S, g \wedge K = G \wedge K$, jenomže $g(x) \neq g(f(x))$ a tedy $G(x) \neq G(f(x))$ což znamená $f(x) \notin M_i$.

7.2 Disjunktní zjemnění

Lemma o disjunktním zjemnění.
Buď $\xi \geq \omega$ kardinál. Pro každé $\alpha \in \xi$ nechť M_α je množina o mohutnosti ξ. Pak existuje soubor množin $\{D_\alpha : \alpha \in \xi\}$ tak, že :

$$(\forall\alpha)|D_\alpha| = \xi$$
$$(\forall\alpha)D_\alpha \subseteq M_\alpha$$
$$\alpha \neq \beta : D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$$

Důkaz.
$|M_\alpha| = \xi$. Transfinitní indukcí budeme vybírat body $m(\alpha,\beta)$, pro $\alpha, \beta \in \xi \times \xi, \alpha \leq \beta$. $m(0,0) \in M_0$ libovolný. Nechť $\beta \in \xi$, předpokládejme, že pro všechna $\gamma < \beta$ a $\alpha \leq \gamma$ známe prvky $m(\alpha,\gamma)$, vesměs různé. $|M_0| = \xi$, $|\{(\alpha,\gamma) : \alpha \leq \gamma < \beta\}| < \xi$ a tedy existuje $m(0,\beta) \in M_0 \setminus \{m(\alpha,\gamma) : \alpha \leq \gamma < \beta\}$. Buď $\alpha \leq \beta$, pro $\gamma < \alpha$ známe i body $m(\gamma,\beta)$. $|M_\alpha| = \xi$, $\{m(\alpha,\gamma) : \alpha \leq \gamma < \beta\} \cup \{m(\gamma,\beta) : \gamma < \alpha\}$. $m(\alpha,\beta) \in M_\alpha \setminus \{m(\alpha,\gamma) : \alpha \leq \gamma < \beta\} \cup \{m(\gamma,\beta) : \gamma < \alpha\}$.
Z indukčního kroku okamžitě plyne : $\forall\alpha\forall\beta : \alpha \leq \beta < \xi$. $m(\alpha,\beta) \in M_\alpha$. $\langle\alpha,\beta\rangle \neq \langle\alpha_1,\beta_1\rangle \Rightarrow m(\alpha,\beta) \neq m(\alpha_1,\beta_1)$. Stačí položit $D_\alpha = \{m(\alpha,\beta) : \alpha \leq \beta < \xi\}$.

Definice.
$M \subseteq \mathbb{R}$ je Lebesguelovsky měřitelná, jestliže existuje Lebesgueův integrál $\int(\chi_m)dx$ existuje. Pokud navíc $\int(\chi_m)dx > 0$, pak existuje uzavřená $K \subseteq M$, že :

1. $\int(\chi_K)dx > 0$
2. $|\int(\chi_M)dx - \int(\chi_K)dx| < \varepsilon$

$K \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená, jestliže $\mathbb{R} \setminus K$ je otevřená, a to je tehdy, když :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus K \exists \varepsilon > 0 : U(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$

$q, r \in \mathbb{Q}, (q, r) \cap K = \varnothing$, $K = \mathbb{R} \setminus U(q, r)$. Pokud lze množinu takto napsat $\Rightarrow$ je uzavřená. Máme 2^ω možností :
$|\{K \subseteq \mathbb{R} : K$ je uzavřená $\}| = 2^\omega$.

Pro uzavřenou $K \subseteq \mathbb{R}$ platí buď $|K| \leq \omega$, nebo $|K| = 2^\omega$. $L = \{K \subseteq \mathbb{R} : K$ je uzavřená a $|K| = 2^\omega\}$. Podle lemma o disjunktním zjemnění existuje disjuktní systém $M = \{D(K), K \in :\}$ tak, že $\forall K \in L : D(K) \subseteq K$. $|D(K)| = 2^\omega$.

Buď $X \subseteq [0, 1]$ takové, že $(\forall K \in L)|x \cap D(K)| = 1$. x není Lebesgueovsky měřitelná.

1. $\int(\chi_x)dx = 0$ $\exists k$ uzavřená, $K \subseteq [0, 1] \setminus x$. $\in (\chi_K)dx > 0$. Bod $x \in X \cap D(K)$ nemůže existovat, #spor.
2. $\int(\chi_x)dx > 0$ $\exists k$ uzavřená, $K \subseteq x$, $\int(\chi_K)dx > 0$. Pro toto $KD(K) \subseteq K \subseteq x$. Přitom $|D(K)| = 2^\omega > 1$. $|x \cap D(K)| = 1$.

7.3 Δ-systém množin

Definice.
Je-li a systém množin, pak a nazveme Δ-systémem s jádrem K, jestliže K je množina a splňuje : $\forall A, B \in a : A \neq B \Rightarrow A \cap B = K$.

Lemma o Δ-systému.
Je-li ξ nespočetný regulární kardinál, $a = \langle a_\alpha : \alpha \in \xi \rangle$ libovolný systém

konečných množin, pak existuje $I \in \xi, |I| = \xi$ tak, že $\langle a_\alpha : \alpha \in I \rangle$ tvoří Δ-systém.

Důkaz.

ξ je nespočetné regulární, všechny a_α jsou konečné, $I_n = \{\alpha \in \xi : |a_\alpha| = n\}$ pro $n \in \omega$. $\xi = \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Protože ξ je nespočetný a regulární, musí existovat nějaké $n \in \omega$, že $|I_n| = \xi$. Budeme tedy předpokládat, že $\langle a_\alpha : \alpha \in \xi \rangle$ a existuje $n \in \omega$, že pro každé $\alpha \in \xi$ je $|a_\alpha| = n$. Důkaz provedeme indukcí přes n:

$n = 1$:

Případy : existuje $x \in \bigcup_{\alpha\in\xi} a_\alpha$ tak, že $|\alpha \in \xi : a_\alpha = \{x\}| = \xi$, $I = \{\alpha \in \xi : a_\alpha = \{x\}\}$. $K = \{x\}$ - jádro. V opačném případě : $\forall x \in \bigcup_{\alpha\in\xi} a_\alpha |\{\alpha \in \xi : a_\alpha = \{x\}\}| < \xi$. Protože ξ je regulární, nespočetné, $|\bigcup_{\alpha\in\xi} a_\alpha| = \xi$. Pro každé $x \in \cup a_\alpha$ zvolme jedno $\alpha_x \in \xi$ tak, že $a_{\alpha_x} = \{x\}$. $I = \{\alpha \in \xi : \exists x \in \cup a_\alpha : \alpha = \alpha_x\}$.

Nechť lemma platí pro $|a_\alpha| = n$. $\langle a_\alpha : \alpha \in \xi \rangle$, pro každé α je $|a_\alpha| = n+1$. Zvolme $z_\alpha \in a_\alpha$, pro každé $\alpha \in \xi$, $\langle b_\alpha : \alpha \in \xi \rangle$, kde $b_\alpha = a_\alpha \setminus \{z_\alpha\}$, $|b_\alpha| = n$. Podle indukčního předpokladu existuje $I, |I| = \xi$, $\langle b_\alpha : \alpha \in I \rangle$ tvoří Δ-systém s jádrem K.

$\langle z_\alpha : \alpha \in I \rangle$. Buď existuje $J \subseteq I$, $|J| = \xi$ a x tak, že pro všechna $\alpha \in J : z_\alpha = x, \langle a_\alpha : \alpha \in J \rangle$ Δ-systém s jádrem $K \cup \{x\}$. Nebo existuje $J \subseteq I$, $|J| = \xi$ tak, že pro $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in J$, $z_\alpha \neq z_\beta$, $\langle a_\alpha, \alpha \in J \rangle$ pak tvoří Δ-systém s jádrem K.

Tvrzení.

Z libovolná množina, $\{\varphi_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ je soubor funkcí takový, že :

1. $\forall \alpha : dom(\varphi_\alpha) \subseteq Z$, $|dom(\varphi_\alpha)| < \omega$
2. $\forall \alpha : rng(\varphi_\alpha) \subseteq \omega$

Pak existují $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \omega$ tak, že $\varphi_\alpha \cup \varphi_\beta$ je funkce $dom(\varphi_\alpha) : \alpha \in \omega$, tvoří systém konečných množin, ω_1 je nespočetný regulární. Podle lemma o Δ-systému existuje $I \subseteq \omega_1, |I| = \omega$ tak, že $dom(\varphi_\alpha) : \alpha \in I$ tvoří Δ systém s jádrem K.

Důkaz.
K je konečná množina, $\varphi \wedge K, \alpha \in I$ jsou funkce z K do ω, je jich $\omega^{|K|} = \omega$. Musí existovat $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in I$, že $\varphi_\alpha \wedge K = \varphi_\beta \wedge K$ a $\varphi_\alpha \cup \varphi\beta$ je funkce (zřejmé).

7.4 Pressing down lemma

Mějme funkci $f : \omega \to \omega$ nadefinovanou takto : $f(0) = 0, f(n+1) = n$. f je funkce, která „stlačuje“ hodnoty dolů.

Definice.
Buď δ limitní ordinál. Množina $M \subseteq \delta$ je nazývá neomezená v δ, jestliže $(\forall \alpha \in \delta)(\exists \beta \in M) : \alpha \leq \beta$. Neomezená množina je tedy oborem hodnot nějakého kofinálního zobrazení.

Definice.
Množina $M \subseteq \delta$ se nazývá uzavřená v δ, jestliže pro každé $\alpha \in \delta$, je-li $\alpha = sup(M \cap \alpha)$, pak $\alpha \in M$. Množina $m \subseteq \delta$ se nazývá uzavřená neomezená v δ, jestliže M je současně neomezená v δ a uzavřená v δ.

Lemma.
Buď δ limitní ordinál, $cf(\delta) = \tau > \omega$. Pak je-li $\xi < \tau$, a $\{c_\alpha : \alpha \in \xi\}$ soubor množin uzavřených neomezených v δ, potom $\cap\{c_\alpha : \alpha \in \xi\}$ je uzavřená neomezená v δ.
Důkaz.
Položme $c = \cap\{\alpha : \alpha \in \xi\}$

1. c je uzavřená : Buď $\zeta < \delta$, předpokládejme, že $\zeta = sup(\zeta \cap C)$: Pro každé $\alpha \in \xi$ je $c_\alpha \supseteq c$, tedy $\zeta = sup(\zeta \cap c_\alpha)$. Protože c_α je uzavřená, je $\zeta \in c_\alpha$. Tudíž $\zeta \in \bigcap_{\alpha \in \xi} c_\alpha = c$.

2. c je neomezená : Zvolme libovolně $\gamma < \delta$. Pro každé $\alpha \in \xi$ je c_α neomezená, tedy existuje $\zeta^1_\alpha \in c_\alpha$ tak, že $\gamma \leq \zeta^1_\alpha$. $cf(\delta) = \tau > \xi$, musí tedy existovat μ_1, pro které $\zeta^1_\alpha \leq \mu_1$, pro všechna $\alpha \in \xi$ a současně $\mu_1 < \delta$. Pro každé $\alpha \in \xi$ je c_α neomezené, tedy existuje $\zeta^2_\alpha \in c_\alpha, \mu_1 \leq \zeta^2_\alpha, cf(\delta) =$

$\tau > \xi$, $\exists \mu_2 : \zeta^2_\alpha \leq \mu_2 < \delta$.
Dále indukcí nalezneme $\mu_n : n \in \omega$ tak, že pro každé $\alpha \in \xi$ existuje $\zeta^n_\alpha \in c_\alpha, \mu_n \leq \zeta^{n+1}_\alpha < \mu_{n+1}$. Protože $cf(\delta) = \tau > \omega$, $\exists \mu = sup\{\mu_n : n \in \omega\} < \delta$.
Je-li $\alpha \in \xi$ libovolné, je-li $\zeta < \mu$, existuje $n \in \omega, \zeta < \mu_n < \mu$. Protože $\mu = sup\{\mu_n : n \in \omega\}$, tedy také existuje $\zeta^{n+1}_\alpha : \zeta < \zeta^{n+1}_\alpha < \mu, \zeta^{n+1}_\alpha \in c_\alpha$. Pro každé $\alpha \in \zeta$ je $\mu = sup(c_\alpha \cap \mu)$. c_α je uzavřená, $\mu \in c_\alpha, \mu = \bigcap_{\alpha \in \xi} c_\alpha = c$. Tedy máme c je neomezená.

Definice.
Buď δ ordinál,$cf(\delta) > \omega$, buď $S \subseteq \delta$. Množina S se nazývá stacionární v δ, jestliže $C \cap S \neq \varnothing$ pro každou uzavřenou neomezenou množinu $C \subseteq \delta$.

Definice.
Buď M množina ordinálů, $f : M \to O_n$. Řekneme, že f je regresivní, jestliže pro $\forall \alpha \in M, \alpha \neq \varnothing$ je $f(\alpha) < \alpha$.

Pressing down lemma :
Buď ξ nespočetný regulární kardinál, $M \subseteq \xi$. Pak následující výroky jsou ekvivaletní :

(i) M je stacionární v ξ.

(ii) Pro každou regresivní $f : M \to \xi$ existuje $\zeta \in \xi$, pro které je $f^{-1}(\zeta)$ stacionární v ξ.

(iii) Pro každou regresivní $f : M \to \xi$ existuje $\zeta \in \xi$, pro které je $f^{-1}(\zeta)$ neomezená v ξ.

Důkaz.

(ii)⇒(iii) Triviální, protože každá stacionární množina v ξ je neomezená v ξ.

(iii)⇒(i) Sporem : Nechť M není stacionární. Protože M není stacionární, existuje $C \subseteq \xi$, C je uzavřená neomezená v ξ, $C \cap M = \varnothing$. Definujme $f : M \to \xi$ předpisem $f(\alpha) = \varnothing$ pro $\forall \alpha \in M, \alpha < minC$. $f(\alpha) = sup(C \cap \alpha)$ pro ostatní $\alpha \in M$. Protože C je uzavřená, $\alpha \in M \to \alpha \notin C$. $sup(C \cap \alpha) < \alpha$ pro $\forall \alpha \in M$, f je regresivní. Buď $\zeta \in f[M]$. Je-li $\zeta = \varnothing$, $f^{-1}(\zeta) \subseteq minC$. Je-li $\zeta \in f[M]$, zvolme $\gamma \in M$, že $\zeta = f(\gamma)$. Množina C je neomezená, tedy existuje $\beta = min(C \cap (\xi \setminus \gamma))$. $f^{-1}(\zeta) \subseteq \beta$

tedy omezený. Předpokládali jsme, že M není stacionární, nalezli jsme regresivní $f : M \to \xi$, že $\forall \zeta : f^{-1}(\zeta)$ omezená v ξ, což je #spor s (iii).

Lemma :
$\Delta_{\alpha\in\xi} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\xi} A_\alpha \cup (\alpha + 1)$

Důkaz.
$\gamma \in \Delta_{\alpha\in\xi} A_\alpha$, $\forall \alpha < \gamma : \gamma \in A_\alpha \subseteq A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Kdykoliv $\alpha \geq \gamma$, $\gamma \in A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Tedy $\gamma \in \bigcap_{\alpha\in\xi} A_\alpha \cup (\alpha + 1)$. Je-li $\alpha < \gamma$, pak $\gamma \notin \alpha + 1$. Musí tedy pro $\alpha < \gamma$ platit, že $\gamma \in A_\alpha$, tedy $\gamma \in \Delta_{\alpha\in\xi} A_\alpha$.

Lemma :
Je-li ξ regulární nespočetný kardinál, pro každé $\alpha \in \xi$ je A_α uzavřená neomezená v ξ, pak $\Delta_{\alpha\in\xi} A_\alpha$ je uzavřená neomezená v ξ.

7.5 Ulamova matice

Buď ξ nekonečný kardinál, soubor množin $\langle X(\alpha, \beta) : \alpha < \xi, \beta < \xi^+\rangle$ nazýváme Ulamovou maticí na K^+, jestliže $\forall \alpha < \xi, \forall \beta < \xi^+$ platí :

1. $X(\alpha, \beta) \subseteq \xi^+$
2. $\beta_1 \neq \beta_2 : X(\alpha, \beta_1) \cap X(\alpha, \beta_2) = \varnothing$
3. $\alpha_1 \neq \alpha_2 : X(\alpha_1, \beta) \cap X(\alpha_2, \beta) = \varnothing$
4. $|\xi^+ \setminus \cup\{X(\alpha, \beta) : \beta < \xi^+\}| \leq \xi$
5. $|\xi^+ \setminus \cup\{X(\alpha, \beta) : \alpha < \xi^+\}| \leq \xi$

Věta (Ulam):
Pro každý nekonečný kardinál ξ platí, že Ulamova matice na ξ^+ existuje.

Důkaz.
Je-li $\gamma \geq \xi$, $\gamma < \xi^+$, pak $|\gamma| = \xi$, tedy existuje bijekce $f_\gamma : \xi \to \gamma$. Pro $\alpha < \xi, \beta < \xi^+ : X(\alpha, \beta) = \{\gamma < \xi^+ : f_\gamma(\alpha) = \beta\}$.

1. Triviální.

2. $\beta_1 \neq \beta_2 : \gamma \in X(\alpha, \beta_1) \Rightarrow f_\gamma(\alpha) = \beta_1$, ale f_γ je funkce, tedy $f_\gamma(\alpha) \neq \beta_2$, tedy $\gamma \notin X(\alpha, \beta_2)$.

3. $\alpha_1 \neq \alpha_2 : \gamma \in X(\alpha_1, \beta) \Rightarrow f_\gamma(\alpha_1) = \beta$, ale f_γ je bijekce, tedy $f_\gamma(\alpha_2) \neq \beta$, tedy $\gamma \notin X(\alpha_2, \beta)$.

4. $\alpha < \xi, \gamma \geq \xi$. f_γ je bijekce $\xi \to \gamma$, tedy $\exists \beta < \gamma : f_\gamma(\alpha) = \beta$. Ve skutečnosti tedy platí (ukázali jsme) : $\xi^+ \setminus \cup\{X(\alpha, \beta) : \beta < \xi^+\} \subseteq \xi$

5. Buď $\beta < \xi^+$. Je-li $\gamma > \beta$, tak $f_\gamma : \xi \to \gamma$ je bijekce, $\beta < \gamma$ existuje $\alpha < \xi : f_\gamma(\alpha) = \beta$, tedy $\gamma \in X(\alpha, \beta)$. $\xi^+ \setminus \cup\{X(\alpha, \beta) : \alpha < \xi\} \subseteq \beta + 1$

Důsledek.
Je-li $\lambda = \xi^+ > \omega$, pak každou stacionární množin E na λ lze rozložit na λ stacionárních množin.

Důkaz.
Zvolme stacionární E na $\lambda = \xi^+$, tedy lze zvolit $\{X(\alpha, \beta) : \alpha < \xi, \beta < \lambda\}$ Ulamovu matici na λ. $\forall \beta < \xi^+ = \lambda : \exists \alpha = \alpha(\beta) < \xi : E \cap X(\alpha, \beta)$ je stacionární v $\lambda = \xi^+$, dokážeme sporem : $\exists \beta < \xi^+ : \forall \alpha < \xi : \exists C_\alpha$ uzavřená neomezená v $\lambda, C_\alpha \cap X(\alpha, \beta) \cap E = \emptyset$. Množina $C = \cap\{c_\alpha : \alpha < \xi\}$ uzavřená neomezená v $\lambda, C \cap E \subseteq \xi^+ \setminus \cup\{X(\alpha, \beta) : \alpha < \xi\}$, ale ta má mohutnost $< \lambda$, #spor.
Funkce $\beta \to \alpha(\beta)$ je funkce z ξ^+ do ξ, tedy $\exists \tilde{\alpha} \in \xi : I = \{\beta < \xi^+ : \tilde{\alpha} = \alpha(\beta)\}$ má mohutnost ξ^+ pro $\beta \in I : X(\tilde{\alpha}, \beta) \cap E$ je stacionární a zároveň $\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow X(\tilde{\alpha}, \beta_1) \cap X(\tilde{\alpha}, \beta_2) = \emptyset$. Tedy $\{X(\tilde{\alpha}, \beta) \cap E : \beta \in I\}$ je hledaný systém disjunktních stacionárních podmnožin množiny E.

Tvrzení.
Nelze najít lepší míru na $\mathbb{R}$, než Lebegovu : každá množina má konečnou míru?

Důsledek.
Na ω_1 neexistuje δ-aditivní v bodech se anulující pravděpodobnostní míra, při níž jsou všechny množiny měřitelné.

Pravděpodobnostní míra celého $= 1$
δ-aditivní : disjunktní $\to$ míra sjednocení $= \sum$ měr. $\eta(\{x\}) = 0$

Důkaz.
Sporem: buď η taková míra. Ulam : $\{X(n,\beta) : n \in \omega, \beta \in \omega_1\}$ buď Ulamova matice. $\beta < \omega_1, \omega_1 \setminus \bigcup\limits_{n\in\omega} X(n,\beta)$ je spočetná, tedy má míru 0.
$\eta(\bigcup\limits_{n\in\omega} X(n,\beta)) = 1$. $\forall\beta < \omega_1 : \exists X(n(\beta),\beta) : \eta(X(n(\beta),\beta)) > 0$ a tedy $\eta(X(n(\beta),\beta)) > \frac{1}{K(\beta)}$. Pro nespočetně mnoho β je $K(\beta) = \tilde{k}$. $|I| = \omega_1, \beta \in I, \eta(X(n(\beta),\beta)) > \frac{1}{\tilde{k}}$. $\exists\tilde{n} \in \omega, J \subseteq I, |J| = \omega_1, \beta \in J : \eta(\beta) = \tilde{n}$. $\beta \in J \Rightarrow \eta(X(\tilde{n},\beta)) > frac1\tilde{k}$.
$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\tilde{k}}, \beta_{\tilde{k}+1} \in J$, pak ale nemůžou být disjunktní a tedy $\exists\beta_1 \neq \beta_2 \in J : X(\tilde{n},\beta_1) \cap X(\tilde{n},\beta_2) \neq \emptyset$, což je #spor.

7.6 Ramseyova věta

Značení : A množina, λ kardinál.
$[A]^\lambda = \{X \subseteq A : |X| = \lambda\}$

Definice.
Buďte H, X, A množiny, $H \subseteq X$, λ kardinál (A je seznam barev), $f : [X]^\lambda \to A$. Řekneme, že množina H je homogenní pro f, jestliže $\exists a \in A$ tak, že $\forall K \in [H]^\lambda$ je $f(K) = a$.

Definice.
Buďte ξ, λ, ζ kardinály, $n \in \omega$.
Symbol $\xi \to (\lambda)^n_\zeta$ čteme „Pro každou množinu $X, |X| = \xi$, pro každé zobrazení $f : [X]^n \to A$, kde $|A| = \zeta$ existuje $H \subseteq X : |H| \geq \lambda, H$ je homogenní pro f“.

Ramseyova věta.
Pro každé $n, k \in \omega$ platí $\omega \to (\omega)^n_k$.

Důkaz.
Indukcí dle n :
$n = 1$: $f : [\omega]^1 \to k$. Položme pro $i \in k : A_i = \{n : f(\{n\}) = i\}$. $A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_{k-1} = \omega$, musí tedy existovat nějaké $j \in K : |A_j| = \omega$.
$n \to n+1$: Buď $f : [\omega]^{n+1} \to k$. Indukcí sestrojíme množiny $A_j : j \in \omega$ a body $a_j : j \in \omega$ takto : $a_0 = 0, A_0 = \omega \setminus \{0\}$.

Indukční krok : známe : $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_j$. $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_j$. $|A_0| = |A_1| = |A_2| = \ldots = |A_j| = \omega$. $a_i = minA_i : i \in \{0, 1, 2, \ldots, j\}$.
Buď $g : [A_j]^n \to k$ definována takto : Pro $L \in [A_j]$ je $f(\{a_j\} \cup L) = g(L)$. Z indukčního předpokladu víme, že existuje $H_j \leq A_j, |H_j| = \omega$, H_j je homogení pro g.
Položme $a_{j+1} = minH_j, A_{j+1} = H_j \setminus \{a_{j+1}\}$. Položme $A = \{a_j : j \in \omega\}, |A| = \omega, L_1, L_2 \in [A]^{n+1}$. Pak platí : je-li $min(L_1) = min(L_2)$, pak $f(L_1) = f(L_2)$. $min(L_1) = min(L_2) = a_j$. $L_1 \setminus \{a_j\} \subseteq H_j, L_2 \setminus \{a_j\} \subseteq H_j$.
Můžeme tedy definovat $\varphi : A \to k$, $\varphi(a) = f(L)$, kde $L \in [A]^{n+1}$, $min(L) = a$. $\exists i \in k : \varphi^{-1}(i)$ je nekonečné, $H = \varphi^{-1}(i), H$ je homogenní pro f.

Důsledek (Konečná Ramseyova věta).
$(\forall r \in \omega)(\forall n \in \omega)(\forall k \in \omega)(\exists N \in \omega) : N \to (r)^n_k$.

Důkaz.
Sporem : s využitím principu kompaktnosti : $(\forall r \in \omega)(\forall n \in \omega)(\forall k \in \omega)(\exists N \in \omega) : \neg(N \to (r)^n_k)$
$\exists f_N : [N]^n \to k$ bez homogenní množiny o mohutnosti $\geq r$. $I = [\omega]^n$. $\{f_N : N \in \omega\}$ je soubor částečných selektorů pokrývající všechny konečné podmnožiny. Ramseyova věta platí, princip kompaktnosti, filtrované prodloužení.

Důsledek 2:
$\ldots$ a homogenní množina H má $|H| > min(H)$.

Pokus o zesílení Ramseyovky:
$2^\omega \not\to (3)^2_\omega$. (Neexistuje)

Věta (Sierpinsky):
$\mathbb{R}$ lze dobře uspořádat pomocí $\preccurlyeq$. $(\mathbb{R}, \leq)$ nebo $|\mathbb{R}| = 2^\omega$.